

非線形電子回路のカオスの ダブルスクロール・アトラクタのエルゴート性

Ergodic Characters of Chaotic Double-Scroll Attractor from Experiments with Nonlinear Electronic Circuits

深谷 義勝*, 鈴木 郊宇**, 岩田 博之***, 新美 吉彦****

Yoshikatu FUKAYA, Kou SUZUKI, Hiroyuki IWATA and Yoshihiko NIIMI

Abstract Recently, in the wide range of fields, such as medical science, psychology, technology and economical or social systems etc., and especially on the applications of some sciences and engineering, researches and treatments of the chaotic phenomena have rapidly developed and have been advancing very high speedy. Until present time, many such research papers of understanding the intrinsic properties of chaos had been widely reported.

We had considered and investigated with respect to the chaos of nonlinear electronic circuits, particularly of double-scroll attractor^[1]. This phenomena could be observed with V_C-I_L Lissajou's curves or pictures, and we could provide the phenomena. Furthermore, there exists correlative relationships mutually between each other on the waveformed of the oscillations and we could observe a chaotic dynamical behavior from them.

As the consequence obtained from our researches and experiments, we could induce that 1) the range of the oscillations has a kind of probabilistic characters by local stationariness of the oscillation, and that 2) As there exist periodic, randomness in the oscillation, we might be applied a probabilistic process. And therefore ergodic properties would be examined from these facts.

Though it was already pronounced that chaotic oscillation have existed quasi-random number series^{[1][2][3]}, here we are particularly to practice probabilistic, statistical measurements of the circuits.

1. まえがき

我々が実測に使う電子回路を通してカオスを研究するとき、力学系としてのストレンジ・アトラクタ^[10](strange attractor), スパイラル・アトラクタ

が観測されるカオス領域をまず知る必要がある。そして、周期アトラクタの領域(窓という)があつて前者と交互に存在したりする。振動が成長(条件を変える)することでスクリュウ・アトラクタになり、さらにダブルスクロール・アトラクタとなる。

カオスのアトラクタについて周期解はランダムなあらゆる周期の種類を持っている。いわゆる外部からのランダム入力がなく、無秩序な周期の種類も多く存在するカオス振動となっている。この挙動は予測不能の場合があるが、高次の複雑な軌道を持つことによる。

* 愛知工業大学 電子工学科 (豊田市)

** 愛知工業大学 電気工学科 (豊田市)

*** 愛知工業大学 情報通信工学科 (豊田市)

**** 愛知技術短大 電子工学科 (豊田市)

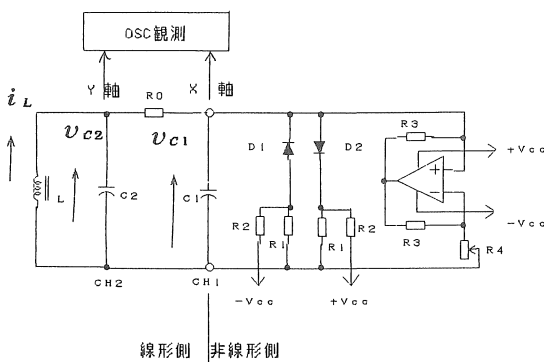
単純な雑音というより, 不規則な振動をする非線形確率系として扱うべきと思う。よってダブルスクロール・アトラクタについて, 確率過程として, ランダムな振動を捉えて進める。そして, エルゴート性過程の適用の可否があるか, などの点を考察している。

非線形OPアンプ回路とLC回路の結合回路により得られるダブルスクロール出力を確率過程の基本測定をする。すなわち確率分布, 確率密度関数などそしてグラフ化を行い検討した報告である。

2. 本論

2.1 カオスのダブルスクロールの発生

カオスの振動は非線形電子回路(負性抵抗)を用いる法により容易に発生することができ, 理論的に力学系の場合に対応できる。ダブルスクロールの発生については第1図のように非線形側の負性抵抗回路と線形回路が損失抵抗で結合するシステムの構成である。この目的の回路はチュア・松本らにより研究が進められてきた。そのダブルスクロール・アトラクタ^[7]について安定領域の存在範囲や非線形特性の有様の条件も明らかになっている。我々もダブルスクロール・アトラクタへの動特性確認^[1]を行って, カオス振動の起動を現実的に容易にした。カオス現象とその分岐(バイファケーション)が狭い領域の回路素子値で条件を満足している。



OP-Amp : HA17741PS
 D1, D2 : 1S588 (×2)
 $\pm V_{cc}$: $\pm 15V$
 $L = 10mH$, $C_1 = 0.0047\mu F$, $C_2 = 0.047\mu F$
 $R_0 = 1.56k\Omega$, $R_1 = 3.3k\Omega$, $R_2 = 46.2k\Omega$
 $R_3 = 300\Omega$, $R_4 = 1.146k\Omega$ (安定時の抵抗値)
 $R_4 = 1.046k\Omega \sim 1.787k\Omega$

第1図 カオス(ダブルスクロール)発生回路

カオス現象は, 決定論的な力学法則に従うことでランダム運動の軌道を決めているが, ダブルスクロールも同じ状態を持っている。そして一定の確率法則に従うランダム運動が, 非線形負性抵抗回路から得られている。

第1図に示すカオス発生回路の回路方程式は次で示される。

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} &= G(v_{c2} - v_{c1}) - g(v_{c1}) \\ C_2 \frac{dv_{c2}}{dt} &= G(v_{c1} - v_{c2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで $G = 1/R_0$

$g(v_{c1}) =$ 非線形部分回路N字特性

カオスの状態はパラメータ G の値により異なり, スクリュー・アトラクタ($G=0.657$)が得られてさらに G を大きくすると原点対象で二つのアトラクタが成長して合体しダブルスクロール・アトラクタとなる。この場合状態変数が有界な領域内で非周期的運動すなわちランダム運動を行っている。無限に周波数の高い周期解があれば, 当然雑音(ノイズ)になるが, 周波数帯域が回路により決まり, カオスも不変的構造を持っている。

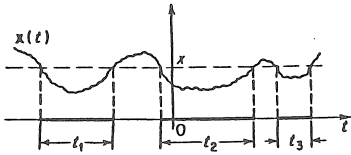
2.2 カオス振動のエルゴート性

現実的に起こる定常物理現象におけるランダムデータは, 一般にエルゴード的であるといわれている。またランダム現象について多くの場合, 一つの時刻歴としてサンプリングによる処理解析が行われる。サンプリング系列が十分長い系列ならば, その中には過程を決める確率的構造がすべて表現されており, 代表的な系列である。換言すれば, ある状態の現れる先験的確率に近似できる。なお確率過程である標本関数(サンプリング)の集合はその平均化あるいは, 異なる時刻におけるサンプリング関数の値の相関(結合モーメント, 自己相関関数)によって現象の性格を記述することができる。

ランダム(不規則)過程に関するアンサンプル平均と時間平均とが一致する場合, このランダム過程はエルゴート過程と呼ばれる。(逆も成立するとみてよい)これは定常的時系列となっている。その上

確率過程になるときエルゴード集合は代数的関数である点に注目したい。

カオス振動は不規則な相互作用で動的振舞いを行っている。すべてランダムだと言い切れないところもある。しかしこの不規則過程は確率過程であって、確率集合の概念を導入できる。さらにカオス振動の生起確率が初期状態の影響を受けることもない。これらの事項からエルゴード性の条件は満たされる。そしてカオス的ダブルスクロール・アトラクタについては外部ランダム入力を必要としないが、局所的にはランダムとかノイズと考えられる領域も存在するし、かつカオス生起の機会に高次元状態があり複雑な軌道を作り出している。なおかつ決定論的カオスであることも明らかになっている。こうしてダブルスクロール・アトラクタもエルゴード性を持つものと想定する。



第2図 ランダム変数 $x(t)$

さて、ランダム過程において、ダブルスクロールの確率密度測定に関するサンプル関数 $X(t)$ に、定常確率過程 $\{X(t)\}$ として、その期待値 $E\{f(X(t))\}$ を仮定すると、 $f(X(t))$ の時間平均 η_τ は

$$\eta_\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(X(t)) dt \quad (2)$$

と表わされ、 $T \rightarrow \infty$ において $E\{f(X(t))\}$ に平均収束するとき、 $\{X(t)\}$ はエルゴード性である。すなわち、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \eta_\tau = E\{f(X(t))\} \quad (3)$$

であり、このことはアンサンブル平均 $E\{f(X(t))\}$ が単純サンプルの時間平均から決定できる意味がある。

次にランダム変数の分布関数 $F(X; t)$ は時間 t の関数であり、 $x(t)$ をリアル過程とおくと、

$$F(x; t) = P\{x(t) \leq x\} \quad (4)$$

そして $x(t)$ の第一次分布と呼ばれる。これから x に関する微分から密度が求められる。

すなわち、

$$f(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \quad (5)$$

一方、結合分布においては、

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{x(t_1) \leq x_1, x(t_2) \leq x_2\} \quad (6)$$

$x(t)$ 過程の第2次分布であることを付け加えておくことにした。

第4式において、 x の条件式が成立したとき、確率過程を $y(t)$ とすれば、

$$\begin{aligned} x(t) \leq x \text{ ならば } y(t) &= 1 \\ x(t) > x \text{ ならば } y(t) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

と表すことができる。

その平均 $E\{y(t)\}$ は

$$E\{y(t)\} = \frac{1}{F(x)} P\{x(t) \leq x\} \quad (8)$$

そして、

$$\begin{aligned} E\{y(t+\tau)y(t)\} &= 1 \cdot P\{x(t+\tau) \leq x, x(t) \leq x\} \\ &= F(x_1, x_2; \tau) \end{aligned} \quad (9)$$

上式の $F(x_1, x_2; \tau)$ は $x(t)$ の第二次分布、それによって自己相関が与えられる。そして、 $x(t) = x$ より下のレベル $x(t)$ の平均時間に対して積分 y_τ が等しい。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt = F(x) \quad (10)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) (F(x_1, x_2; \tau) - F^2(x)) d\tau = 0 \quad (11)$$

分布についてエルゴード性に関する結論は、ランダム変数 $x(t+\tau)$ と $x(t)$ が大きな τ に無関係ならば(第2図参照)

$\lim_{T \rightarrow \infty} F(x_1, x_2; \tau) = F^2(x)$ で表されて真ということである。

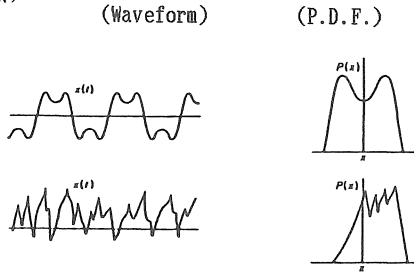
$$\begin{aligned} (\text{注1}) \quad \frac{t_1 + \dots + t_n}{2T} \rightarrow F(x) \quad (\text{注2}) \quad y_\tau = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) dt \\ x(t) \leq x, \tau \text{ が大きいとする。} \quad E\{y_\tau\} = E\{y(t)\} = F(x) \\ \text{が成立する。} \end{aligned}$$

2・3 カオス振動と確率密度関数

非線形ダイナミック・システムの第1図回路は、外部からノイズを供給しないが、カオス振動モードについて不規則性と波形、この系の分岐を含めた確

率過程から, 確率密度関数 (P. D. F.) の実測によって, その特性を調べる必要がある.

一般的には, ランダム非線形システムの応答は, P. D. F. 複合最大曲線特性を表すことが理論的に知られている. (第3図波形とP. D. F. との対比参照)



第3図 波形とP.D.F.との対比

ここで, 二つの具体例^[9]について, ランダムな動的確率過程を考えることにする. はじめに, マルコフ過程から進展したF-P-K方程式を示すと,

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i P] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij} P] = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{初期条件 } P(\bar{x}, 0 | \bar{x}_0, 0) &= \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \\ &= \prod_{i=1}^n \delta(x_i - x_{i0}) \end{aligned} \quad (13)$$

また係数について

$$\begin{cases} a_i(\bar{x}, t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - x_i) \cdot P(\bar{y}, t + \Delta t | \bar{x}, t) dy_1 \cdots dy_n \\ b_{ij}(\bar{x}, t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} (y_i - x_i) \cdot (y_j - x_j) P(\bar{y}, t + \Delta t | \bar{x}, t) \cdot dy_1 \cdots dy_n \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{さらに, } n \text{次元マルコフ過程 } \bar{x}(t, \omega) \\ \bar{x}(t, \omega) = [x_1(t, \omega) \cdot x_2(t, \omega) \cdots x_n(t, \omega)]^T \end{aligned} \quad (15)$$

(ランダム遊として $x(t, \omega), t < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ である.)

そして確率密度関数(P. D. F.)は

$$P. D. F. = P(x_1, \dots, x_n, t | x_{10}, \dots, x_{n0}) \quad (16)$$

(註)

F-P-K式 : (Fokker-Plank-Kolmogorov)式

2・3・1 白色雑音の攪乱非線形振子^[9]

モデルシステムは, 1986:Thompson による平均ゼロなる定常ランダム作用力がある振子である. (第4図) このシステムのmの運動は

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 - \lambda \sin x_1 + \eta(t, \omega) \end{cases} \quad (17)$$

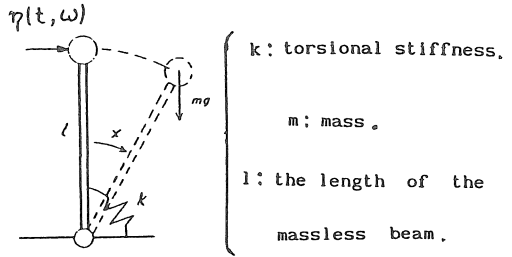
ただし, ホワイトノイズ $\eta(t, \omega)$ が成立する. そして

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad \text{かつ}$$

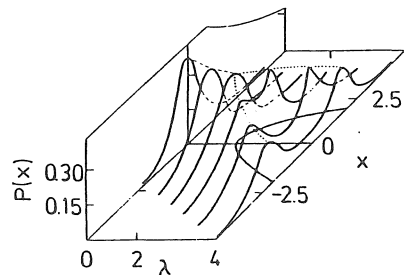
F-P-K式から定常状態のP. D. F.が求められる. 変移 x_1 , 分岐パラメータ λ から^[9],

$$P(x_1, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_1, x_2, \lambda) dx_2 \quad (18)$$

これは第5図で表されて, $\eta(t, \omega) = 0$ の決定論的システムの分岐と確率過程の分岐の類次を示している.



第4図 モデルシステム



第5図 分布確率過程の三次元表示

2・3・2 ノイズのカオス応答のP. D. F.^[9]

非線形動的システムのP. D. F.の性質をダフィン発振器を例に考える. ランダムノイズで攪乱されるとき

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = B \cos \Omega t + \eta(t, \omega) \quad (19)$$

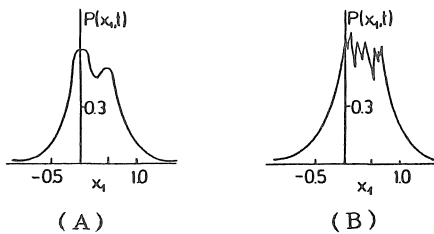
の方程式で示される。初期条件あるいはF-P-K式を満足させる変換によって、 $x_1(t, \omega)$ のP.D.F.

Fは

$$P(x_1, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} P(x_1, x_2, \dots, x_4, t | x_{10}, x_{20}, B, D) \cdot dx_2 dx_3 dx_4 \quad (20)$$

により計算される。システムのパラメータによって、第6図の形式曲線が得られる。

$a=1.0$, $b=-10.0$, $c=100$, $B=1.2$, $D=0.2$ のシステムパラメータにおいて、 $\Omega=3.4$, $t=20$ のとき図(A), $\Omega=3.5$, $t=40$ のとき図(B)が得られる。

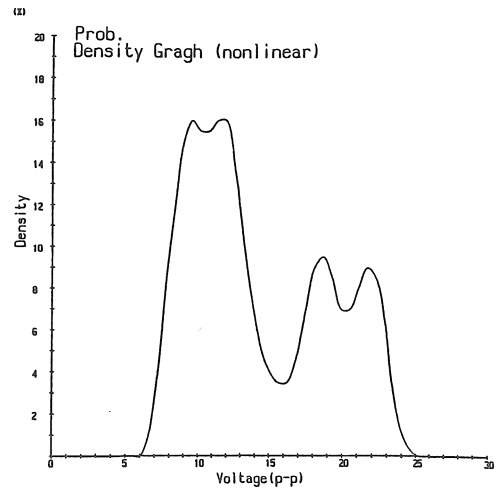


第6図 P.D.F.曲線

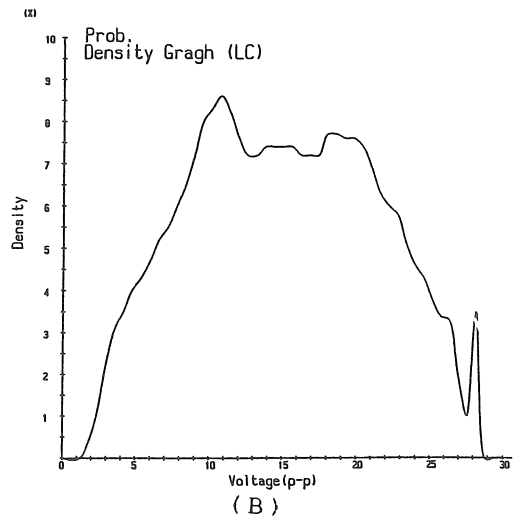
3. 確率過程の各実験結果

第1図による測定は、確率密度、結合確率密度そしてパワー・スペクトル密度の測定であり、その結果について述べる。ダブルスクロール発生回路が非線形負性抵抗側と線形共振LC側回路から構成されている観点からそれぞれ測定している。第7図(A), (B)は確率密度関数P.D.F.の結果であって、第7図(A)は明らかに複合最大値特性を示した。第3図に類似できるから本質的には正弦波型と不規則波形の合成で作られる波形を表すものとする。第7図(B)については概念的にガウス分布であって、狭帯域性の形状といえる。カオスのダブルスクロール振動の成長振動波形は第8図のようになる。これはLC回路のステップ応答特性傾向があつて、跳躍瞬時から振動開始の指数関数的振幅成長が観察できる。やはり線形的なため正弦波形状を示している。

第9図については回路が線形側と非線形側が抵抗により結合されているため結合特性(相互関係)として、結合確率密度を求めた。そしてデータ処理で



(A)



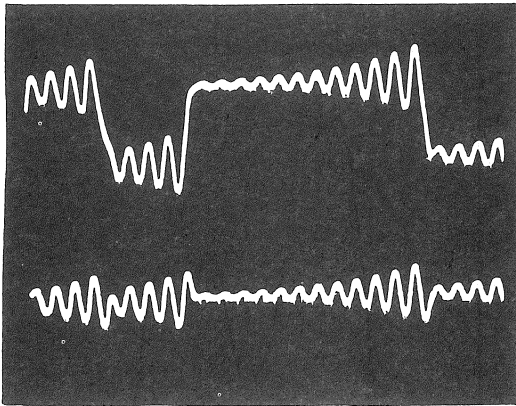
(B)

第7図 P・D・F.の特性

三次元表示のグラフに作成したから直感的観察が可能である。この場合は、不規則に振動の相関を表している。また、第10図では結合確率分布の三次元グラフを示した。この場合は累積確率分布として知られるが、密度関数を $-\infty$ から x まで積分したものに等しい。こうした図形を見ることが出来る。パワースペクトル密度関数については、第11図においてFFT測定図を示した。これは密度と周波数の関係をプロットしたことになる。

4. むすび

カオスの動的振舞いを基本的考察しつつ、ダブル



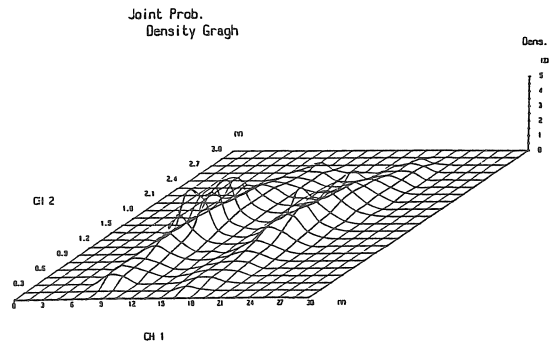
第8図 カオス振動成長波形

スクロール・振動について, 不規則(ランダムネス)性は確率過程を満たしている。よってエルゴード性の仮定は正しいことが言明される。実験から判明することは, 白色雑音ではないが局所領域的に正弦波とランダム雑音が適当な量において合成された状態を持っている。

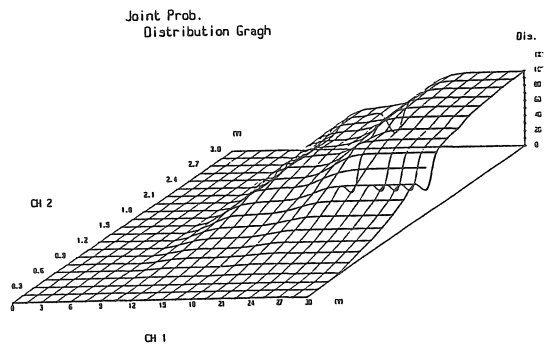
今後, さらに確率統計的手法による測定からカオスのダブルスクロールの振動の性質を詳しく調べて, 工学的な応用さらに実用面へ進展することを期待したい。

5. 参考文献

- [1] 深谷義勝, 朱伯銘, 紫藤進, 鈴木郊宇: 非線形オペアンプ回路のカオスのダブル・スクロール・アトラクタの動特性確認, 愛工大研究報告, No.26, 1991.
- [2] 深谷義勝, 鈴木郊宇, 岩田博之, 新美吉彦: 非線形電子回路のカオスのダブルスクロールに関するエルゴード性, 愛工大研究報告, No.28, 1993.
- [3] 戸田盛和: カオス-混沌のなかの法則, 117-120, 岩波書店, 東京, 1991.
- [4] 山口昌哉: カオスとフラクタル, 107-112, ブルーバックス, 講談社, 東京, 1989.
- [5] 滝保夫: 通信方式, 26, 112, コロナ社, 東京, 1963.
- [6] Liu-Qing Pei, Fen Guo, Shu-Xian Wu and Leon O Chua: Experimental confirmation of the period-adding route to chaos in a



第9図 結合確率密度グラフ



第10図 結合確率分布グラフ

nonlinear circuit, IEEE Trans. on circuit and Systems, Vol.31, 438-442, 1986.

[7] Maciej. J. Ogorzalek: Chaotic regions from double scroll, IEEE Trans. on circuit and Systems, Vol.34, 201-203, 1989.

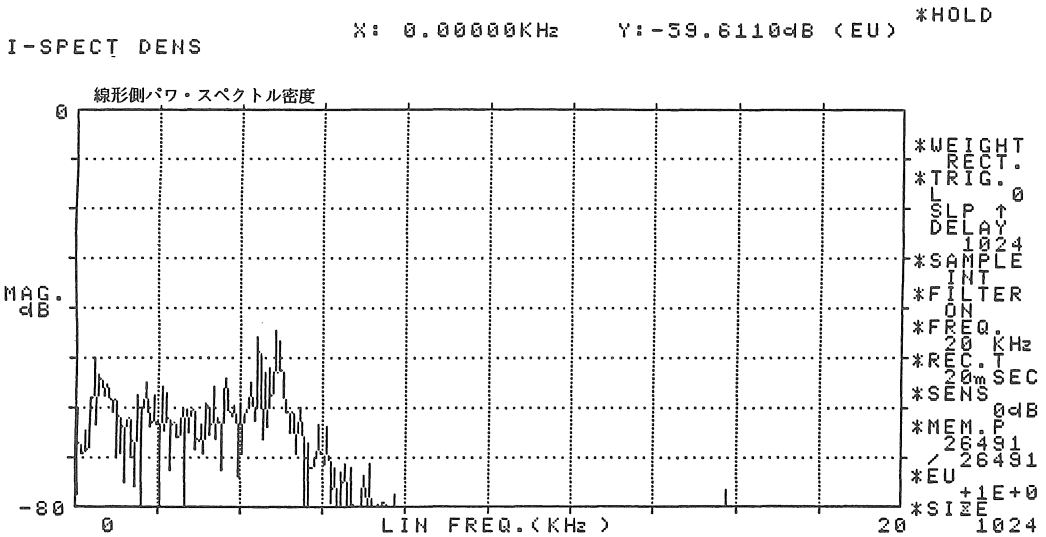
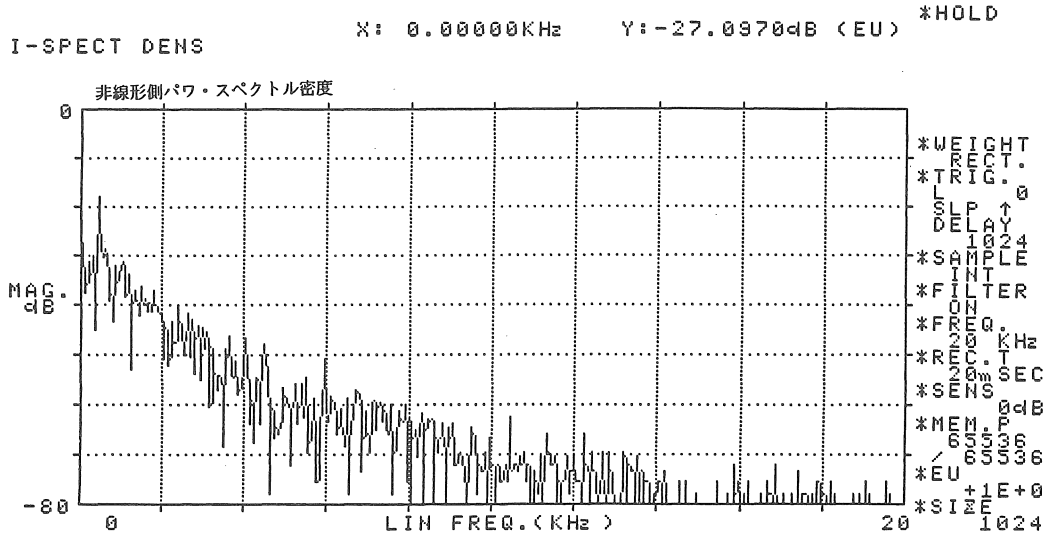
[8] 合原一幸: カオス - カオス理論の基礎と応用, 118, サイエンス社, 東京, 1992.

[9] Tomasz Kapitaniak: Chaos in systems with noise (second edition), World Scientific, New York, 1990.

[10] Athanasios Papoulis: Probability, random variable and stochastic process, 22-24, 327, 471, McGraw-Hill, New York, 1965.

[11] 瀬沼武, 鈴木浩, 斉藤利通, 笹瀬巖: カオスによる多重化疑似乱数の創刊特性, 15-17, EIC NLP 90-79, 1991.

[12] Li, T.Y. and Yorke, J.A.: Ergodic trans-formation from an interval into itself, Trans. an. math. soc., 235, 183-192, 1978.



第11図 パワ・スペクトル密度特性
(FFT測定)

[13]幸田徹, 柿木: 疑似乱数とカオス, 情報処理学会論文誌, Vol.27, 289-296, 1986.

[14]大石進一: カオスと乱数発生, bit, Vol.14, 704-713, 1982.

[15] Athanasios Papoulis : Probability, random variable and stochastic process, 323-343, McGraw-Hill, New York, 1965.

[16] Richard C. Dubes : The theory of applied probability, 356-370, Prentice-Hall, New York, 1968.

[17] Athanasios Papoulis : Signal analysis, 354-355, McGraw-Hill, New York, 1977.

(受理 平成 5年 3月19日)