

複合多項式の画像データ圧縮への応用

秦野 和郎・河瀬 聡*

Application of Composite Polynomials to Image Data Compression

Satoru KAWASE and Kazuo HATANO

With the development of personal computers, it becomes that the digital image data are widely handled in many areas. Usually, a large amount storage is required to save an image data, that is, it is expensive to handle the image data. To reduce this costs, many data compression techniques have been investigated.

In this paper, we propose a data compression scheme based on the composite polynomials. The digital image data are considered to be the sampled data of functions with finitely many discontinuous points. Low frequency components are represented in terms of discrete Fourier coefficients and high frequency components are represented in terms of jump discontinuities of the function.

1. はじめに

パーソナルコンピュータの普及に伴って多くの分野で画像データが取り扱われるようになってきた。デジタル画像データを格納するには非常に大きな補助記憶装置を必要とする。例えば、 640×400 画素の1600万色の画像データは、一枚当たり768KBの容量を必要とする。

画像データはこのように大量のデータとなる反面、冗長性が高い。従って適切な圧縮過程により、データ量を大幅に縮小し得る可能性がある。

本論文では複合多項式を用いて変換処理法の系統に属する一手法を提案している。

画像データをある関数の等間隔離散点上における値であるとみなすと、その関数は画像におけるエッジなどに対応した幾つかの不連続点やカスプを持つような関数である。ここで、関数に存在する不連続点やカスプなどの不連続性に着目して、なるべく少ない個数のパラメータでその関数を表現できれば画像データの圧縮が実現されることになる。

不連続点を持つような関数を少ない誤差で近似する方法にスプライン関数を使う方法がある。しかし、この方法ではパラメータの扱いが難しい。もう一つの方

法に複合多項式、即ち三角多項式と区分的多項式との和を使う方法がある。この方法はFFT（高速 Fourier 変換）を使って得られた離散 Fourier 係数を関数の不連続性から得られる数値によって修正することにより低周波の部分から急速に収束する係数を得る事が出来る。したがって、この係数の絶対値の大きい部分だけと関数の特徴量から元の関数を近似することが出来るため、データ圧縮が可能になる。

本論文では、実際のデータを使って上の方法を検討し、簡単な例を用いて実験を行い高い圧縮比が得られることを確認したので報告する。

本論文の2.では複合多項式について、3.では一次元データを使って本方法の原理を説明している。4.では二次元の画像データに適用する方法について述べる。

2. 複合多項式について

本章では複合多項式をデータ圧縮に適用しうる可能性をみるために、その性質について述べる。

周期 2π を持つ、与えられた周期関数 $f(x)$ は

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{\ell-1} < x_{\ell} = 2\pi \quad (1)$$

で不連続であるかも知れないが、これらの点を除けば

十分に滑らかであるとする。このとき $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0(f) + \sum_{j=1}^{\infty} \{a_j(f) \cos jx + b_j(f) \sin jx\}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos jx dx & : j \geq 0, \\ b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin jx dx & : j \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

とフーリエ展開される。式 (3) に部分積分を適用して式を整理すると下式が得られる (フーリエ係数の漸近展開式)。

$$\begin{cases} a_j(f) = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \sin jx_i \\ \quad + \frac{1}{j^2} \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \cos jx_i \\ \quad - \frac{1}{j^3} \left\{ \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \sin jx_i \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(3)}(x) \sin jx dx \right\}, \\ b_j(f) = -\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \cos jx_i \\ \quad + \frac{1}{j^2} \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \sin jx_i \\ \quad + \frac{1}{j^3} \left\{ \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \cos jx_i \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(3)}(x) \cos jx dx \right\} \end{cases}, \quad (4)$$

$$\omega_\nu(f; x_i) = \frac{f^{(\nu)}(x_i-) - f^{(\nu)}(x_i+)}{\pi} \quad (5)$$

ここで $\omega_\nu(f; x_i)$ は不連続点 x_i における ν 次微係数の跳躍量を π で割った値である。

このように $a_j(f), b_j(f)$ は, j^{-1} で減少する項, j^{-2} で減少する項, そして j^{-3} 以上で減少する項に分解することが出来る。

つぎに, N は偶数であるとして区間 $[0, 2\pi]$ における等間隔離散点を

$$\begin{cases} \bar{x}_r = \frac{2\pi r}{N} & : 0 \leq r \leq N, \\ \hat{x}_r = \frac{2\pi}{N} \left(r + \frac{1}{2} \right) & : 0 \leq r \leq N-1 \end{cases} \quad (6)$$

とおく。ここで $f(x)$ の不連続点 $x_i : 0 \leq i \leq \xi-1$ は, 上式の $\bar{x}_r : 0 \leq r \leq N$ のどれかに一致するとする。 \hat{x}_r の各点は \bar{x}_r の中点となるように定義している。

$f(x)$ の \hat{x}_r での値 $f(\hat{x}_r)$ を

$$f(\hat{x}_r) = \frac{1}{2} \hat{u}_0(f)$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1}^{N/2-1} \{ \hat{u}_j(f) \cos j\hat{x}_r + \hat{v}_j(f) \sin j\hat{x}_r \} \\ & + \frac{1}{2} \hat{v}_{N/2}(f) \sin \frac{N}{2} \hat{x}_r \end{aligned} \quad (7)$$

とおくと, 三角関数の選点直交性から

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f) = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f(\hat{x}_r) \cos j\hat{x}_r & : 0 \leq j \leq N/2-1 \\ \hat{v}_j(f) = \frac{2}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f(\hat{x}_r) \sin j\hat{x}_r & : 1 \leq j \leq N/2 \end{cases} \quad (8)$$

である (中点則に基づく離散フーリエ変換)。式 (8) に式 (2) を代入して得られる折り返しの式

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f) = a_j(f) \\ \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \{ a_{kN+j}(f) + a_{kN-j}(f) \}, \\ \hat{v}_j(f) = b_j(f) \\ \quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \{ b_{kN+j}(f) - b_{kN-j}(f) \} \end{cases} \quad (9)$$

にフーリエ係数の漸近展開式, 式 (4) を代入すると次の式 (10), (11) を得ることが出来る。

式 (9) の右辺第二項のみに代入すると,

$$\begin{cases} \hat{u}_j(f) = a_j(f) \\ \quad + \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \sin jx_i \\ \quad + \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \cos jx_i \\ \quad - \frac{1}{N^3} \left\{ \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \sin jx_i \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\alpha}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\}, \\ \hat{v}_j(f) = b_j(f) \\ \quad - \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \cos jx_i \\ \quad + \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \sin jx_i \\ \quad + \frac{1}{N^3} \left\{ \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \cos jx_i \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\beta}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\} \end{cases} \quad (10)$$

を得る。これは, 離散フーリエ係数 $\hat{u}_j(f), \hat{v}_j(f)$ はフーリエ係数 $a_j(f), b_j(f)$ に上式の第二項以降を加えたものであることを示している。

次に式 (9) の右辺の第一項, 第二項に代入すると, $\hat{u}_j(f), \hat{v}_j(f)$ は次式のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_j(f) \\ = \frac{1}{N} \hat{r}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \sin jx_i \\ + \frac{1}{N^2} \hat{r}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \cos jx_i \\ - \frac{1}{N^3} \left\{ \hat{r}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \sin jx_i \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\alpha}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\}, \\ \hat{v}_j(f) \\ = -\frac{1}{N} \hat{r}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \cos jx_i \\ + \frac{1}{N^2} \hat{r}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \sin jx_i \\ + \frac{1}{N^3} \left\{ \hat{r}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \cos jx_i \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\beta}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\} \end{array} \right. \quad (11)$$

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\delta}_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{(k+x)^\nu} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^\nu}{(k-x)^\nu} \right\}, \\ \hat{r}_\nu(x) = \frac{1}{x^\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{(k+x)^\nu} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^\nu}{(k-x)^\nu} \right\} \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+x)^\nu} \\ : 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}_3(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\sin(k+x)t}{(k+x)^3} \right. \\ \left. + \frac{\sin(k-x)t}{(k-x)^3} \right\}, \\ \hat{\beta}_3(t; x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{\cos(k+x)t}{(k+x)^3} \right. \\ \left. - \frac{\cos(k-x)t}{(k-x)^3} \right\} \\ : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}_3(t; x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k+x)t}{(k+x)^3}, \\ \hat{\beta}_3(t; x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k+x)t}{(k+x)^3} \\ : 0 < x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right. \quad (14)$$

である。

次にこれらの関数の幾つかの性質について述べる。
はじめに、 $\hat{r}_1(x)$, $\hat{r}_2(x)$ は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{r}_1(x) = \pi \operatorname{cosec} \pi x = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \\ \hat{r}_2(x) = \pi^2 \cot \pi x \cdot \operatorname{cosec} \pi x \\ = \left(\frac{\pi}{\sin \pi x} \right)^2 \cos \pi x \end{array} \right. \quad (15)$$

である。また、

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\gamma}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(k+x)^3} + \frac{1}{(k-x)^3} \right\} \\ : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \check{\gamma}_3(x) = \frac{1}{x^3} + \bar{\gamma}_3(x) \\ : 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (16)$$

とおくと

$$|\hat{\alpha}_3(t; x)| \leq \bar{\gamma}_3(x), \quad |\hat{\beta}_3(t; x)| \leq \bar{\gamma}_3(x), \quad (17)$$

$$|\check{\alpha}_3(t; x)| \leq \check{\gamma}_3(x), \quad |\check{\beta}_3(t; x)| \leq \check{\gamma}_3(x) \quad (18)$$

である。

次に、式(10)の右辺第四項が十分に小であると仮定して2次補正された離散フーリエ係数を次のように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_j(f) = \hat{u}_j(f) \\ - \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \sin jx_i \\ - \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \cos jx_i \\ \hat{b}_j(f) = \hat{v}_j(f) \\ + \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \cos jx_i \\ - \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \sin jx_i \end{array} \right. \quad (19)$$

このとき、

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_j(f) - a_j(f) \\ = -\frac{1}{N^3} \left\{ \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \sin jx_i \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\alpha}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\}, \\ \hat{b}_j(f) - b_j(f) \\ = \frac{1}{N^3} \left\{ \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \cos jx_i \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\beta}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\} \end{array} \right. \quad (20)$$

である。上式において

$$\left\{ \begin{array}{l} |\omega_2(f; x_i)| \leq \frac{2}{\pi} \|f^{(2)}\|_{\infty}, \\ \|f^{(\nu)}\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f^{(\nu)}(x)|, \\ \left| \int_0^{2\pi} \hat{\alpha}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) dt \right| \leq 4\bar{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \end{array} \right. \quad (21)$$

などを使うと

$$\left\{ \begin{array}{l} |\hat{a}_j(f) - a_j(f)| \\ \leq \frac{1}{N^3} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \xi \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(2)}\|_{\infty} \right. \\ \left. + 2\hat{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(3)}\|_{\infty} \right\} \\ |\hat{b}_j(f) - b_j(f)| \\ \leq \frac{1}{N^3} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \xi \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(2)}\|_{\infty} \right. \\ \left. + 2\hat{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(3)}\|_{\infty} \right\} \end{array} \right. \quad (22)$$

となる。すなわち, 2次補正された離散フーリエ係数の誤差は $O(N^{-3})$ 程度である。

さらに, 式(11)の右辺第三項が十分に小であると仮定して2次修正された離散フーリエ係数を

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_j(f) = \hat{u}_j(f) \\ - \frac{1}{N} \hat{\tau}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \sin jx_i \\ - \frac{1}{N^2} \hat{\tau}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \cos jx_i \\ \tilde{b}_j(f) = \hat{v}_j(f) \\ + \frac{1}{N} \hat{\tau}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_0(f; x_i) \cos jx_i \\ - \frac{1}{N^2} \hat{\tau}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_1(f; x_i) \sin jx_i \end{array} \right. \quad (23)$$

と定義する。このとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{a}_j(f) \\ = -\frac{1}{N^3} \left\{ \hat{\tau}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \sin jx_i \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\alpha}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\}, \\ \tilde{b}_j(f) \\ = \frac{1}{N^3} \left\{ \hat{\tau}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \sum_{i=0}^{\xi-1} \omega_2(f; x_i) \cos jx_i \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\beta}_3 \left(Nt; \frac{j}{N} \right) f^{(3)}(t) dt \right\} \end{array} \right. \quad (24)$$

である。これから式(22)を得たのと同じようにして

$$\left\{ \begin{array}{l} |\hat{a}_j(f)| \leq \frac{1}{N^3} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \xi \hat{\tau}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(2)}\|_{\infty} \right. \\ \left. + 2\hat{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(3)}\|_{\infty} \right\}, \\ |\hat{b}_j(f)| \leq \frac{1}{N^3} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ \xi \hat{\tau}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(2)}\|_{\infty} \right. \\ \left. + 2\hat{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \|f^{(3)}\|_{\infty} \right\} \end{array} \right. \quad (25)$$

を得ることができる。さらに,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N^3} \hat{\tau}_3 \left(\frac{j}{N} \right) = \frac{1}{j^3} + \frac{1}{N^3} \hat{\delta}_3 \left(\frac{j}{N} \right), \\ \frac{1}{N^3} \hat{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) = \frac{1}{j^3} + \frac{1}{N^3} \hat{\gamma}_3 \left(\frac{j}{N} \right) \end{array} \right. \quad (26)$$

などを使うと, 2次修正された離散フーリエ係数は $O(j^{-3})$ でその絶対値が減少することがわかる。

この性質をデータ圧縮に応用する。

3. データ圧縮の原理

データ個数 640 個 ($N = 640$), 8 ビット ($0 \leq \hat{f}_r \leq 255$) の一次元データを例としてデータ圧縮の原理を説明する。

3.1 データ圧縮の手順

本方法では, データを圧縮するのに次の手順を実行する。

1. \hat{f}_r : $0 \leq r \leq 640 (= N)$ から x_i (不連続点), $\omega_0(f; x_i)$, $\omega_1(f; x_i)$ (関数値, 微係数の跳躍量の定数倍) を推定する。

(a) 下の条件を用いて, 不連続点を検出する。このとき, 不連続点と不連続点との間に3個程度以上のデータが入るようにする。また, 2つのしきい値 T_0, T_1 には適当な値を与える。

- i. $|\hat{f}_r - \hat{f}_{r-1}| \geq T_0$ のとき \bar{x}_r を x_i の候補とする。(不連続点の検出)
- ii. $|(\hat{f}_{r-1} - \hat{f}_{r-2}) - (\hat{f}_{r+1} - \hat{f}_r)| \geq T_1$ のとき \bar{x}_r を x_i の候補とする。(カスプの検出)

(b) $\hat{f}_{i-3}, \hat{f}_{i-2}, \hat{f}_{i-1}$ を使って最小二乗近似直線を得て $f(x_i-)$, $f'(x_i-)$ を計算する。

また, $\hat{f}_i, \hat{f}_{i+1}, \hat{f}_{i+2}$ を使って最小二乗近似直線を得て $f(x_i+)$, $f'(x_i+)$ を計算する。これらを使って $\omega_0(f; x_i)$, $\omega_1(f; x_i)$: $0 \leq i \leq \xi - 1$ を求める。

2. \hat{f}_r : $0 \leq r \leq N - 1$ から FFT を使って, 式(8)で与えられる離散フーリエ係数 $\hat{u}_j(f)$: $0 \leq j \leq 319 (= N/2 - 1)$, $\hat{v}_j(f)$: $0 \leq j \leq 320 (= N/2)$ を計算する。

3. $\omega_0(f; x_i)$, $\omega_1(f; x_i)$: $0 \leq i \leq \xi - 1$ 及び, 式(19)で得られる $\hat{a}_j(f)$, $\hat{b}_j(f)$: $0 \leq j \leq n - 1$ を計算する。ここで n は, 式(23)で得られる $\hat{a}_j(f)$, $\hat{b}_j(f)$ を零と見なし得る程度にとる。

上の手順において得られた各数値は, 全て2バイト長にしている。

以上で640個の8ビットデータが,

1. $3 \times \xi$ 個の2バイトデータ $[x_i, \omega_0(f; x_i), \omega_1(f; x_i)]$
 2. $1 + 2 \times (n - 1)$ 個の2バイトデータ $[\hat{a}_j(f), \hat{b}_j(f)]$
- の2つの要素に圧縮される。

元のデータを再生するときには, 次の手順を実行する。

1. $3 \times \xi$ 個の2バイトデータ $[x_i, \omega_0(f; x_i), \omega_1(f; x_i)]$ と $1 + 2 \times (n - 1)$ 個の2バイトデータ $[\hat{a}_j(f), \hat{b}_j(f)]$ を式(19), (23)に代入して離散フーリエ係数 $\hat{u}_j(f)$, $\hat{v}_j(f)$ をすべて ($N=640$) 計算する。ここで, 式(23)を使うとき $\tilde{a}_j(f)$, $\tilde{b}_j(f)$ は零とおく。

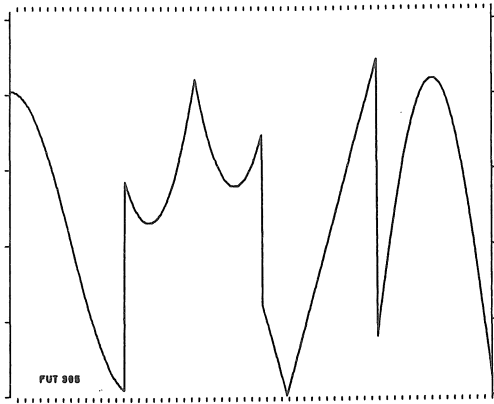
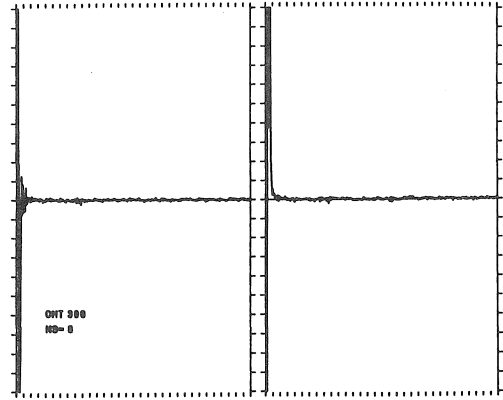
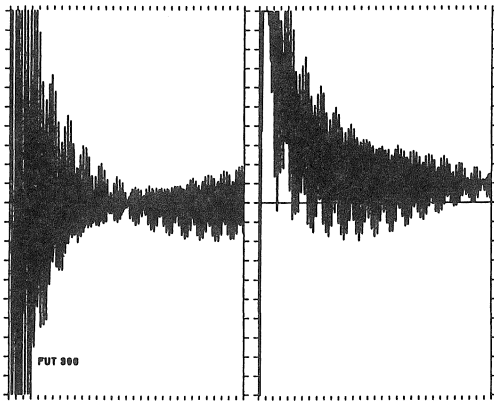


図 1: 原データ $f(\hat{x}_r)$



(a) $32\hat{a}_j(f)$ (b) $32\hat{b}_j(f)$

図 3: 補正されたフーリエ係数 $\hat{a}_j(f), \hat{b}_j(f)$



(a) $32\hat{u}_j(f)$ (b) $32\hat{v}_j(f)$

図 2: 原データのフーリエ係数 $\hat{u}_j(f), \hat{v}_j(f)$

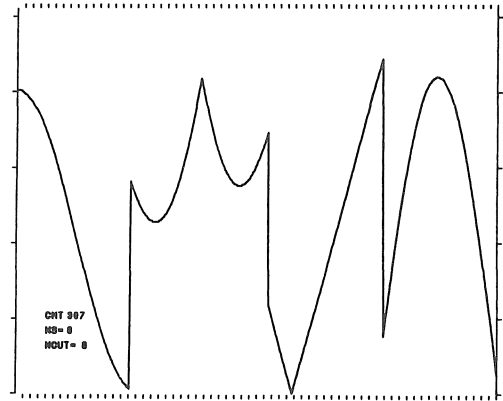


図 4: 復元された原データの近似値 $h(\hat{x}_r)$

2. 逆FFTを用いて元のデータ \hat{f}_r を再生する。

3・2 計算例

640 個の 8 ビットデータで 6 個の不連続点を持つようなデータを作り、上のデータ圧縮の手順を適用してみた。

原データ $f(\hat{x}_r)$ を図 1 に示す。ここで、 $N = 640$ 、 $\xi = 6$ である。図は横軸に $r(0$ から 639 までの整数値)、縦軸に振幅 (0 から 640 までの整数値) をとり、原点を左下にしている。

式 (8) を用いて $f(\hat{x}_r)$ の離散フーリエ係数 $\hat{u}_j(f)$ 、 $\hat{v}_j(f)$ を求めたのが図 2 である。横軸に $j(0$ から 320 の整数値) をとっており、縦軸には $\hat{u}_j(f)\hat{v}_j(f)$ を 32 倍したものを ± 100 の範囲のみを図示している。この図のように、大きな j に対してもその絶対値はゆっくりとしか減少していない。

図 3 は、 $0 \leq j \leq 7 (= n - 1)$ に対しては式 (19) で与えられる $\hat{a}_j(f), \hat{b}_j(f)$ を求めた値、 $j \geq 8 (= n)$ に対し

ては式 (23) で与えられる $\hat{a}_j(f), \hat{b}_j(f)$ を求めた値を示している。図のように $j \geq 8$ に対しては零と見なし得る程度にまで減少している。

ここで式 (19)、(23) において用いた $\omega_0(f; x_i)$ 、 $\omega_1(f; x_i)$ 、 $0 \leq i \leq 5 (= \xi)$ は $3 \cdot 1$ の 1. で求めた値を使っている。

したがって、保存するデータは [不連続点の位置、関数値、微係数の跳躍量] $[x_i, \omega_0(f; x_i), \omega_1(f; x_i)]$ 、 $0 \leq i \leq 5$ の 18 個のデータと $\hat{a}_j(f)$ 8 個、 $\hat{b}_j(f)$ 7 個の補正された離散フーリエ係数、15 個のデータだけですむことになる。

つぎに、保存されたデータから式 (19)、(23) をつかって離散フーリエ係数を 640 個すべて求め、これを逆フーリエ変換して原データを復元したものが、図 4 に示した $h(\hat{x}_r)$ である。

図 5 は原データ $f(\hat{x}_r)$ から復元したデータ $h(\hat{x}_r)$ を引いたものを ± 10 の範囲のみを図示している。

このように原データと復元データとの誤差は ± 2

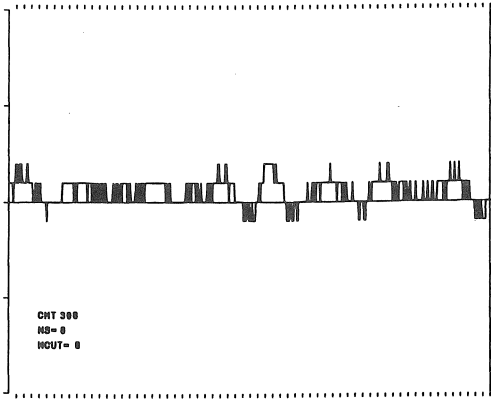


図5: 原データと復元されたデータとの差分
 $f(\hat{x}_r) - h(\hat{x}_r)$

の範囲に収まっており良好なデータ圧縮・復元結果が得られた。

4. 画像データへの適用

2., 3.では複合多項式を用いて一次元データを圧縮する方法を述べた。本章では, これを拡張して二次元データを圧縮する一方法を提案する。

4.1 画像データ圧縮の方法

この方法は, 一次元データへの手法を二度実行するものである。

対象とする画像データは, x, y 方向の等間隔離散点をそれぞれ

$$\begin{cases} \hat{x}_r = \frac{2\pi}{M} \left(r + \frac{1}{2} \right) & : 0 \leq r \leq M-1, \\ \hat{y}_s = \frac{2\pi}{N} \left(s + \frac{1}{2} \right) & : 0 \leq s \leq N-1 \end{cases} \quad (27)$$

としたとき,

$$\begin{aligned} \hat{f}_{r,s} &= f(\hat{x}_r, \hat{y}_s) \\ &: 0 \leq r \leq M-1, 0 \leq s \leq N-1 \end{aligned} \quad (28)$$

と与えられるとする。まず, $0 \leq s \leq N-1$ に対して

$$\hat{G}_s(\hat{x}_r) = \hat{f}_{r,s} \quad : 0 \leq r \leq M-1 \quad (29)$$

であるような関数, $\hat{G}_s(x)$ の不連続点 $x_{k,s}$, 関数値及び微係数の跳躍量, $\omega_0(\hat{G}_s; x_{k,s}), \omega_1(\hat{G}_s; x_{k,s}) : 0 \leq k \leq \xi(s) - 1$ を算出する。ここで $\hat{G}_s(x)$ は,

$$0 = x_{0,s} < x_{1,s} < \dots < x_{\xi(s)-1,s} < x_{\xi(s),s} = 2\pi \quad (30)$$

を除けば十分に滑らかな関数であるとする。

次に, 実FFTを N 回適用して

$$\begin{cases} \hat{u}\hat{f}_{i,s}(f) = \frac{2}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \hat{f}_{r,s} \cos i\hat{x}_r \\ \quad : 0 \leq i \leq M/2 - 1, \\ \hat{v}\hat{f}_{i,s}(f) = \frac{2}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \hat{f}_{r,s} \sin i\hat{x}_r \\ \quad : 1 \leq i \leq M/2 \\ \quad : 0 \leq s \leq N-1 \end{cases} \quad (31)$$

を得る。

適当な $m \ll M$ を定めて

$$\begin{cases} \hat{a}\hat{f}_{i,s}(f) = \hat{u}\hat{f}_{i,s}(f) \\ \quad - \frac{1}{M} \hat{\delta}_1 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_0(\hat{G}_s; x_{k,s}) \sin ix_{k,s} \\ \quad - \frac{1}{M^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_1(\hat{G}_s; x_{k,s}) \cos ix_{k,s} \\ \hat{b}\hat{f}_{i,s}(f) = \hat{v}\hat{f}_{i,s}(f) \\ \quad + \frac{1}{M} \hat{\delta}_1 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_0(\hat{G}_s; x_{k,s}) \cos ix_{k,s} \\ \quad - \frac{1}{M^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_1(\hat{G}_s; x_{k,s}) \sin ix_{k,s} \\ \quad : 0 \leq i \leq m-1, 0 \leq s \leq N-1 \end{cases} \quad (32)$$

及び,

$$\begin{cases} \hat{a}\hat{f}_{i,s}(f) = \hat{u}\hat{f}_{i,s}(f) \\ \quad - \frac{1}{M} \hat{\tau}_1 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_0(\hat{G}_s; x_{k,s}) \sin ix_{k,s} \\ \quad - \frac{1}{M^2} \hat{\tau}_2 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_1(\hat{G}_s; x_{k,s}) \cos ix_{k,s} \\ \hat{b}\hat{f}_{i,s}(f) = \hat{v}\hat{f}_{i,s}(f) \\ \quad + \frac{1}{M} \hat{\tau}_1 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_0(\hat{G}_s; x_{k,s}) \cos ix_{k,s} \\ \quad - \frac{1}{M^2} \hat{\tau}_2 \left(\frac{i}{M} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\xi(s)-1} \omega_1(\hat{G}_s; x_{k,s}) \sin ix_{k,s} \\ \quad : m \leq i \leq M/2 - 1, 0 \leq s \leq N-1 \end{cases} \quad (33)$$

を計算する。実際には m を適切にとれば, 式(33)は無視し得る程度の大きさになるはずであるから計算する必要はない。

以上は横方向への圧縮過程である。

次に $0 \leq i \leq m-1$ に対して

$$\hat{C}_i(\hat{y}_s) = \hat{a}\hat{f}_{i,s}(f) \quad : 0 \leq s \leq N-1 \quad (34)$$

であるような関数 $\hat{C}_i(y)$ の不連続点 $y_{k,i}$ 、関数値及び微係数の跳躍量 $\omega_0(\hat{C}_i; y_{k,i})$ 、 $\omega_1(\hat{C}_i; y_{k,i})$: $0 \leq k \leq \phi(i)-1$ を算出する。ここで $\hat{C}_i(y)$ は、

$$0 = y_{0,i} < y_{1,i} < \dots < y_{\phi(i)-1,i} < y_{\phi(i),i} = 2\pi \quad (35)$$

を除けば十分に滑らかな関数であるとする。全く同じように

$$\hat{S}_i(\hat{y}_s) = \hat{b}\hat{f}_{i,s}(f) \quad : 0 \leq s \leq N-1 \quad (36)$$

であるような関数 $\hat{S}_i(y)$ の不連続点 $\hat{y}_{k,i}$ 、関数値及び微係数の跳躍量 $\omega_0(\hat{S}_i; \hat{y}_{k,i})$ 、 $\omega_1(\hat{S}_i; \hat{y}_{k,i})$: $0 \leq k \leq \psi(i)-1$ を算出する。ここで $\hat{S}_i(y)$ は、

$$0 = \hat{y}_{0,i} < \hat{y}_{1,i} < \dots < \hat{y}_{\psi(i)-1,i} < \hat{y}_{\psi(i),i} = 2\pi \quad (37)$$

を除けば十分に滑らかな関数であるとする。

再び、実 FFT を $1+2 \times (m-1)$ 回実行して

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}\hat{u}_{i,j}(f) = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{a}\hat{f}_{i,s}(f) \cos j\hat{y}_s \\ \quad : 0 \leq j \leq N/2-1, \\ \hat{a}\hat{v}_{i,j}(f) = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{a}\hat{f}_{i,s}(f) \sin j\hat{y}_s \\ \quad : 1 \leq j \leq N/2 \\ \hat{b}\hat{u}_{i,j}(f) = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{b}\hat{f}_{i,s}(f) \cos j\hat{y}_s \\ \quad : 0 \leq j \leq N/2-1, \\ \hat{b}\hat{v}_{i,j}(f) = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{b}\hat{f}_{i,s}(f) \sin j\hat{y}_s \\ \quad : 1 \leq j \leq N/2 \\ \quad : 0 \leq i \leq m-1 \end{array} \right. \quad (38)$$

を計算する。

適当な $n \ll N$ を定めて

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}\hat{a}_{i,j}(f) = \hat{a}\hat{u}_{i,j}(f) \\ \quad - \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\phi(i)-1} \omega_0(\hat{C}_i; y_{k,i}) \sin jy_{k,i} \\ \hat{a}\hat{b}_{i,j}(f) = \hat{a}\hat{v}_{i,j}(f) \\ \quad - \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\phi(i)-1} \omega_1(\hat{C}_i; y_{k,i}) \cos jy_{k,i} \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}\hat{b}_{i,j}(f) = \hat{a}\hat{u}_{i,j}(f) \\ \quad + \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\phi(i)-1} \omega_0(\hat{C}_i; y_{k,i}) \cos jy_{k,i} \\ \hat{b}\hat{a}_{i,j}(f) = \hat{b}\hat{u}_{i,j}(f) \\ \quad - \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\phi(i)-1} \omega_1(\hat{C}_i; y_{k,i}) \sin jy_{k,i} \\ \hat{b}\hat{b}_{i,j}(f) = \hat{b}\hat{v}_{i,j}(f) \\ \quad - \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\psi(i)-1} \omega_0(\hat{S}_i; \hat{y}_{k,i}) \sin j\hat{y}_{k,i} \\ \hat{b}\hat{a}_{i,j}(f) = \hat{b}\hat{v}_{i,j}(f) \\ \quad + \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\psi(i)-1} \omega_1(\hat{S}_i; \hat{y}_{k,i}) \cos j\hat{y}_{k,i} \\ \hat{b}\hat{b}_{i,j}(f) = \hat{b}\hat{u}_{i,j}(f) \\ \quad + \frac{1}{N} \hat{\delta}_1 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\psi(i)-1} \omega_0(\hat{S}_i; \hat{y}_{k,i}) \cos j\hat{y}_{k,i} \\ \quad - \frac{1}{N^2} \hat{\delta}_2 \left(\frac{j}{N} \right) \\ \quad \sum_{k=0}^{\psi(i)-1} \omega_1(\hat{S}_i; \hat{y}_{k,i}) \sin j\hat{y}_{k,i} \\ \quad : 0 \leq j \leq n-1, 0 \leq i \leq m-1 \end{array} \right. \quad (39)$$

を計算する。

n を適切にとれば、計算手順が容易に類推される $\hat{a}\hat{a}_{i,j}(f)$ 、 $\hat{a}\hat{b}_{i,j}(f)$ 等は無視し得る程度に小さくなるので計算する必要はない。

以上の手順により、 $M \times N$ 個のデータ $\hat{f}_{r,s}$: $0 \leq r \leq M-1, 0 \leq s \leq N-1$ が、

1. 式 (39) で与えられる $(2m-1) \times (2n-1)$ 個の係数、
2. $3 \times \sum_{i=0}^{M-1} \phi(i)$ 個の横方向の不連続点の位置、関数値及び微係数の跳躍量、
3. $3 \times \sum_{i=0}^{N-1} \psi(i)$ 個の縦方向の不連続点の位置、関数値及び微係数の跳躍量、

に圧縮される。

4・2 計算例

以上の手順でどの程度のデータ圧縮が可能になるのかをみるために、一つの例でシミュレーションを実行し期待されるような結果を得ることが出来た。

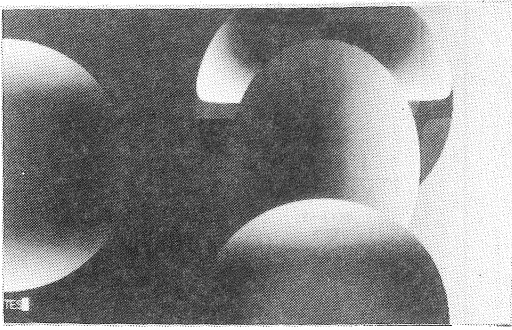


図 6: 原画像

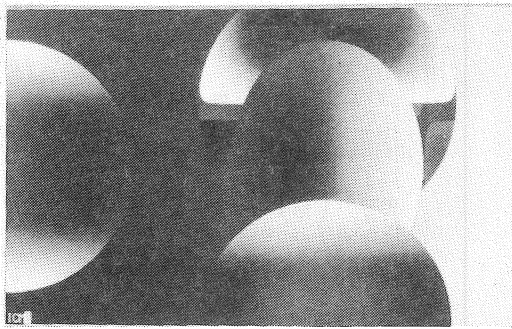


図 7: 復元画像

図 6 に, 原画像を示す。原画像の大きさは 640×480 画素であり, 各画素は R, G, B 各 8 ビットで構成されている。データサイズは 768KB である。

図 7 が原画像を圧縮した後, 復元した画像である。

ここで横方向への圧縮過程における不連続点の検出に用いたしきい値は, 閾数値及び微係数の跳躍量に対してそれぞれ 10, 3 としている。また, 縦方向の圧縮過程においてはそれぞれ 80, 24 としている。

不連続点の位置, 跳躍量のデータサイズは横方向, 縦方向に対してそれぞれ 43776, 15160 バイトである(一つのデータは 2 バイトにしている)。補正されたフーリエ係数のデータサイズは 7922 バイトであるから, 全部で 111KB 強になった。したがって, 圧縮比はほぼ 7:1 となっている。

原画像と復元画像の画質の差異は, 原画像の階調変化が緩やかな部分において復元画像では多少の階調変化の乱れが認められるが, 全体としては殆ど区別がつかない程度である。

5. むすび

データ圧縮の一手法を提案し, 一つの例でその有効性を確かめた。不連続性やカスプの個数がデータの個

数に比較して少なければ, 本方法により高圧縮比が得られるはずである。しかし, 実際の画像データはノイズを含んでいるので, その処理が重要である。ノイズと不連続点とを識別するためには二次元情報を必要とする。すなわち, 画像のエッジが他の所につながっているかを検出しながら, 不連続点やカスプを見い出さなければならない。これらの技術は既に多くの文献に現れているので, そのような手法を筆者らの方法にどのように取り入れるかを今後検討したいと考えている。

本方法では多数の数値計算を必要とするために多くの計算時間を必要とした。そこで, 計算時間を短縮するためのアルゴリズムの開発を必要とする。また, この方法では圧縮されたデータの冗長度は考慮していないため, 平均符号語長を短縮する手法のハフマン符号化法などを用いればさらに高い圧縮比が得られる事が期待される。

参考文献

- 1) 秦野和郎・河瀬聡: 複合多項式による画像データ圧縮への応用(その 1), 平成 2 年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, pp.630, 1990.
- 2) 河瀬聡・秦野和郎: 複合多項式による画像データ圧縮への応用(その 2), 平成 2 年度電気関係学会東海支部連合大会講演論文集, pp.631, 1990.
- 3) 岸本登美夫, 三ツ矢英司, 星田勝典, 釜江尚彦: 静止画像のブロック符号化法, 信学論(B), J62-B, 1, pp.66-76, 1979.
- 4) M.Kunt, A.Ikonomopoulos, and K.Kocher: Second Generation Image Coding Techniques, Proc. of IEEE, 73, 4, pp.549-574, Apr., 1985.
- 5) 斎藤隆弘, 安田浩: 静止画像の符号化方式, テレビジョン学会誌, Vol.44, No.2, pp.153-161, 1990.
- 6) A.N.Netravali, and J.O.Limb: Picture Coding:A Review, Proc. of IEEE, 68, 3, pp.366-406, Mar., 1980.
- 7) A.K.Jain: Image Data Compression:A Review, Proc. of IEEE, 69, 3, pp.349-389, Mar., 1981.
- 8) A.Rosenfeld and A.C.Kak, 長尾真 監訳: デジタル画像処理, 近代科学社, 東京, 1978.