可撓筋違架構による制震構造の研究（その１）

構造物の弾塑性解析

小　高　昭　夫

Consideration on the Structures with Flexible Bracings in Restraint of Vibrations by Earthquake Ground Motions Part, 1.

On the Method of Elasto-Plastic Analysis for the Framed Structures

Teruo ODAKA

Some of most chracteristic engineering procedures in the structural analysis are as follows:

First, the plastic hinge theorem under the interaction between the bending moments and axial forces. Second, the elastic and plastic deformation at the panel zone as beam-to-column conection. Finally, the geometically large deflection theorem as to members, that is to say, especially P-Δ effect on the column members.

The method of analysis on framed structures is developed in this paper. The interaction between the bending moments and axial forces, the elastic and plastic deformations at the panel zone in beam-to-column connection, and P-Δ effect on the column members are considered. And the method of analysis on the framed structures with flexible curved bracings is also introduced.

１．序論

耐震設計法において，建物が大地震をうける場合に対しては，構造物の保有耐力（終局耐力）を求め，構造物の終局状態における耐力，変形を計算し，安全性を確認することになっている。また高層の構造物におけるいわゆる大変形問題としてのPΔ効果についても検討する必要がある。さらに柱・梁接合部パネルの変形，とくにせん断変形については，従来より問題とされている。

本論文においては，構造物の保有耐力をより正確に評価するために，曲線材を有する通常の架構の弾塑性解析法について述べる。勿論柱・梁接合部パネルのせん断，曲げおよび軸方向力による変形，ならびに架構の各部材における幾何学的非線形にもとずくPΔ効果も考慮した弾塑性解析法について詳述される。

２．構造物の弾塑性解析(1)

2.1.　解析上の仮定および降伏条件：弾塑性解析における仮定および降伏条件は次のようにする。

(1)　曲げモーメントと曲率の関係は完全弾塑性とする。

(2)　部材の材端部にのみ塑性ヒンジが生じる単純塑性解析を行う。

(3)　降伏条件は，軸方向力と曲げモーメントの相関関係により生ずるものとし，せん断力の影響は無視する。

(4)　PΔ効果および幾何学的非線形は無視する。

降伏条件はＨ型断面の強軸まわりに対して(1)式および図１に示される。

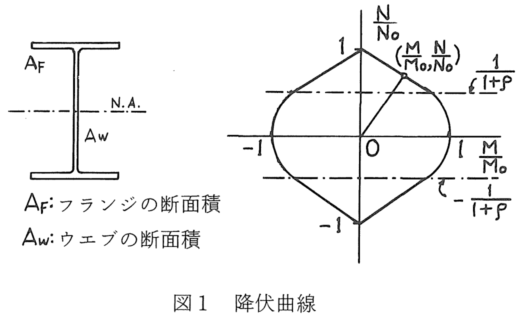


図１　降伏曲線

中立軸がフランジ内に対して：

$$\frac{N}{N_o} \geq \frac{1}{1+\rho};\ \frac{M}{M_o} \pm \frac{2(1+\rho)}{1+2\rho}\left(\frac{N}{N_o}\right) = \pm\frac{2(1+\rho)}{1+2\rho}$$

中立軸がウエブ内に対して：　　　　　　　　　　　　(1)

$$\frac{N}{N_o} \leq \frac{1}{1+\rho}\ ;\ \frac{M}{M_o} \pm \frac{(1+\rho)^2}{1+2\rho}\left(\frac{N}{N_o}\right) = \pm 1$$

ここに　N_o；全塑性軸方向力

M_o；全塑性モーメント

$$\rho = \frac{A_F}{A_W}$$

2.2.　部材の弾塑性剛性マトリックス：部材の両材端部に剛域を有し，剛域端に塑性ヒンジを有する弾塑性剛性マトリックスは，著者の導いた 1)と，R.K.Livesley[2)] の考え方を拡張し，(2)式および図 2 に示される。

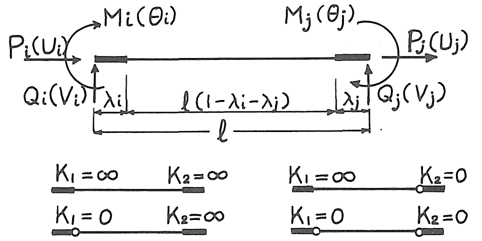


図 2　部材の応力および剛性マトリックスの変化

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \\ P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A_{22}}{2K} & -\frac{A_{12}}{K} & 0 & -\frac{B_{22}}{2K} & \frac{B_{12}}{K} \\ 0 & -\frac{A_{21}}{K} & \frac{A_{11}}{2K} & 0 & \frac{lB_{22}+2B_{21}}{2K} & \frac{2l\ B_{12}+B_{11}}{2K} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_{22}}{2K} & \frac{A_{12}}{K} & 0 & \frac{B_{22}}{2K} & -\frac{B_{12}}{K} \\ 0 & \frac{-lA_{22}+2A_{21}}{2K} & \frac{2lA_{12}-A_{11}}{2K} & 0 & -\frac{B_{21}}{K} & \frac{B_{11}}{2K} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ \theta_i \\ U_j \\ V_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに：

$$K = 2(1-\lambda_i-\lambda_j)^4\left\{(K_1+1)(K_2+1)-\frac{1}{4}\right\}$$

$$+\frac{24\kappa EI(1-\lambda_i-\lambda_j)^2}{\beta GA l^2}\left\{(K_1+1)(K_2+1)-\frac{1}{16}\right\}$$

$$A_{11} = \frac{4EI}{l}\Big[4K_1K_2\{(1-\lambda_j)^3-\lambda_i^3\}+\frac{12K_1K_2\kappa EI}{\beta GA l^2}$$

$$\cdot\{(1-\lambda_j)-\lambda_i\}+3K_1(1-\lambda_j)^2(1-\lambda_i-\lambda_j)$$

$$+3K_2\lambda_i^2(1-\lambda_i-\lambda_j)\Big]$$

$$A_{22} = \frac{12EI}{l^3}\Big[\ 4K_1K_2\{(1-\lambda_i)-\lambda_j\}+K_1(1-\lambda_i-\lambda_j)$$

$$+K_2(1-\lambda_i-\lambda_j)\Big]$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{6EI}{l^2}\Big[2K_1K_2\{(1-\lambda_j)^2-\lambda_i^2\}$$

$$+K_1(1-\lambda_j)(1-\lambda_i-\lambda_j)^2+K_2\lambda_i(1-\lambda_i-\lambda_j)\Big]$$

$$B_{11} = \frac{4EI}{l}\Big[4K_1K_2\{(1-\lambda_i)^3-\lambda_j^3\}+\frac{12K_1K_2\kappa EI}{\beta GA l^2}\{(1-\lambda_j)$$

$$-\lambda_i\}+3K_1\lambda_j^2(1-\lambda_i-\lambda_j)+3K_2(1-\lambda_i)^2(1-\lambda_i-\lambda_j)\Big]$$

$$B_{22} = \frac{12EI}{l^3}\Big[4K_1K_2(1-\lambda_i-\lambda_j)+K_1(1-\lambda_i-\lambda_j)$$

$$+K_2(1-\lambda_i-\lambda_j)\Big]$$

$$B_{12} = B_{21} = -\frac{6EI}{l^2}\Big[2K_1K_2\{(1-\lambda_i)^2-\lambda_j^2\}+K_1\lambda_j(1-\lambda_i$$

$$-\lambda_j)+K_2(1-\lambda_i)(1-\lambda_i-\lambda_j)\Big]$$

ここに　E：ヤング係数，A：断面積，β：せん断剛性低下率，G：せん断弾性係数，I：断面 2 次モーメント，k：せん断形状係数，l：部材長，λ_i, λ_j：剛域長さ，$L = l(1-\lambda_i-\lambda_j)$，$K_1, K_2$：図 2 参照

なお剛性マトリックスの変化は図 2 に示される。

2.3.　解析手順：解析は増分法により水平荷重を順次増分させ，崩壊までの追跡を行う。部材の組合せ応力が降伏関数上にのり塑性挙動をする場合は，弾塑性剛性マトリックスK_1，K_2，は図 2 に示されるようにK_1，K_2を 0 か∞にすることによって表わされる。そして一度塑性挙動をした部材は，弾性に復活しないものとする。また座屈荷重はオイラーの座屈荷重を考慮し，座屈後も現存の応力を保持するものとする。

3．構造物の弾塑性解析(2)

3.1.　概要：構造物の弾塑性解析は，通常の場合第 2 章で示される解析法によってもよい。本章においては，曲線材を有する構造物の解析のため，曲線材の剛性マトリックスを誘導した。次に柱•梁接合部パネルのせん断，曲げモーメントおよび軸方向力による変形を考慮し，さらに高層建築物において生じる応力に及ぼす影響が大きい PΔ 効果による幾何学的非線形の影響および塑性時における剛性低下についても考慮した弾塑性解析法について述べる。

3.2.　曲線材を有する構造物の解析：構造物の解析における基本は部材の剛性マトリックスを求めることと云える。いま図 3 に示す半剛性ヒンジを有する曲線材の剛性マトリックスは次のように求められる。

すなわち図 4 におけるｘ，ｙ座標系において，任意の

ｉ点における応力と変位の関係はCastiglianoの第２定理によって計算され，(3)式で示される。

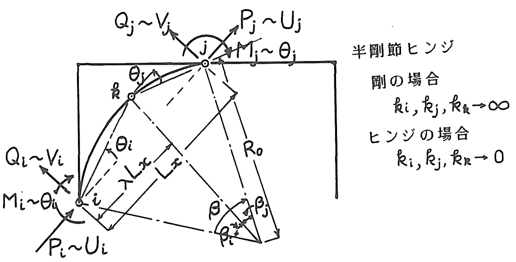
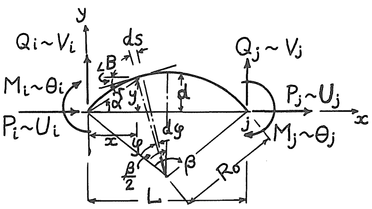


図３　半剛性ヒンジを有する曲線材



$\angle B = \alpha - \frac{\psi}{2}$,　$x = R_o\{sin\frac{\beta}{2} - sin(\frac{\beta}{2} - \psi)\}$

$$y = R_o\{cos(\frac{\beta}{2} - \psi) - cos\frac{\beta}{2}\}$$

$$\gamma = \sqrt{x^2+y^2} = R_o\sqrt{2(1-cos\psi)} = 2R_o sin\frac{\psi}{2}$$

$$sin\alpha = \frac{y}{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{cos(\frac{\beta}{2}-\psi)-cos\frac{\beta}{2}}{sin\frac{\psi}{2}}$$

$$cos\alpha = \frac{x}{\gamma} = \frac{1}{2}\frac{sin\frac{\beta}{2}-sin(\frac{\beta}{2}-\psi)}{sin\frac{\psi}{2}}$$

図４　曲線材のx，y座標（基準）系による表示

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \frac{R_o}{E_o}\begin{bmatrix} c & b & a \\ & d & e \\ sym. & & f \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} \quad \cdots(3)$$

ここに

$$a = \frac{R_o}{I_o}(-2sin\frac{\beta}{2} + \beta cos\frac{\beta}{2})$$

$$b = \frac{R_o{}^2}{I_o}(-1+\frac{\beta}{2}sin\beta + cos\beta)$$

$$c = \frac{R_o{}^2}{I_o}(\beta - \frac{3}{2}sin\beta + \frac{\beta}{2}cos\beta) + \frac{1}{A_o}(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{2}sin\beta)$$

$$d = \frac{R_o{}^2}{I_o}(\beta - \frac{1}{2}sin\beta - \frac{\beta}{2}cos) + \frac{1}{A_o}(\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}sin\beta)$$

$$e = \frac{R_o}{I_o}\beta sin\frac{\beta}{2}\ ,\quad f = \frac{1}{I_o}\beta$$

E_o：ヤング係数，A_o：部材の断面積
R_o：曲率半径，　β：曲角（図４参照）

曲線材の剛性マトリックスは，(3)式よりi点における撓性マトリックスが得られるので，(3)式を逆変換することによって求められ，(4)式となる。

$$\begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \frac{E_o}{R_o\varDelta}\begin{bmatrix} A & B & C \\ & D & E \\ SYM. & & F \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \cdots(4)$$

または　$\{P_i\} = [K_{ii}]\{u_i\}$

ここに　$A = df - e^2$，$E = ab - ce$
$B = ae - bf$，$F = cd - b^2$
$C = be - ad$，$\varDelta = b(2ae - bf) + c(df - e^2) - a^2b$

ここで，i点を固定とした場合，j点における応力と変位の関係は(5)式で表される。

$$\begin{Bmatrix} P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{E_o}{R_o\varDelta}\begin{bmatrix} A & -B & C \\ & D & -E \\ SYM. & & F \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \cdots(5)$$

またj点を固定とした場合，j点の反力（P_j, Q_j, M_j）と，i点の変位（u_i，v_i，θ_i）との関係は(6)式となる。

$$\begin{Bmatrix} P_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{E_o}{R_o\varDelta}\begin{bmatrix} -A & -B & -C \\ -B & -D & -E \\ -BL-C & -DL-E & -EL-F \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \cdots(6)$$

$$\{P_j\} = [K_{ji}]\{U_i\}$$

i点を固定とした場合における応力と変位の関係は，(5)式で求められるので，i点の変位を関係づける剛性マトリックスをとれば，(6)式と同様に，

$$\{P_i\} = [K_{ij}]\{U_j\} \quad \cdots(7)$$

となり，さらに$[K_{ij}] = [K_{ji}]^T$の関係より(8)式となる。

$$[K] = \begin{bmatrix} A & & & & & SYM. \\ B & D & & & & \\ C & E & -F & & & \\ -A & -B & -C & A & & \\ -B & -D & -E & -B & D & \\ -BL-C & -DL-E & -EL-F & C & -E & F \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

次に一般座標系における曲線材の剛性マトリックスは，(8)式を座標変換すれば得られ，(9)式となる。

$$
\begin{Bmatrix} \mathrm{P}_i \\ \mathrm{Q}_i \\ \mathrm{M}_i \\ \mathrm{P}_j \\ \mathrm{Q}_j \\ \mathrm{M}_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{\varDelta} \begin{bmatrix} \mathrm{DF-E^2} & \mathrm{-BF+CE} & \begin{matrix} -\mathrm{L}x(\mathrm{CE-BF}) \\ +\mathrm{BF-CD} \end{matrix} & \mathrm{-DF+E^2} & \mathrm{BF-CE} & \mathrm{-BE+CD} \\ & \mathrm{AF-C^2} & \begin{matrix} -\mathrm{L}x(\mathrm{AF-C^2}) \\ -\mathrm{AE+BC} \end{matrix} & \mathrm{BF-CE} & \mathrm{-AF+C^2} & \mathrm{AE-BC} \\ & & \begin{matrix} \mathrm{L}x^2(\mathrm{AF-C^2}) \\ -2\mathrm{L}x(\mathrm{BC-AE}) \\ +\mathrm{AD-B^2} \end{matrix} & \begin{matrix} -\mathrm{L}x(\mathrm{BF-CE}) \\ -\mathrm{BE+CD} \end{matrix} & \begin{matrix} -\mathrm{L}x(-\mathrm{AF-C^2}) \\ +\mathrm{AE-BC} \end{matrix} & \begin{matrix} -\mathrm{L}x(\mathrm{AE-BC}) \\ -\mathrm{AD+B^2} \end{matrix} \\ & & & \mathrm{DF-E^2} & \mathrm{-BF+CE} & \mathrm{BE-CD} \\ & \text{SYM.} & & & \mathrm{AF-C^2} & \mathrm{-AE+BC} \\ & & & & & \mathrm{AD-B^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \text{------ (9)}
$$

ここに

$$\varDelta = \mathrm{ADF+2BCF-C^2D-AE^2-B^2F}$$

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{E}_o}(-2\mathrm{L}_y\lambda_i a_i + 2\lambda_i\mu_i b_i + \lambda_i{}^2 c_i \mu_i{}^2 d_i - 2\mathrm{L}_y\mu_i e_i$$

$$+\mathrm{L}_y{}^2 f_i + \lambda_j{}^2 c_j + 2\lambda_j\mu_j b_j + \mu_j{}^2 d_j) + \frac{\mathrm{L}_x\mathrm{L}_y{}^2}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k}$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{E}_o}\Big[\{(1-\lambda)\mathrm{L}_x\lambda_i + \mathrm{L}_y\mu_i\}a_i - (\lambda_i{}^2 - \mu_i{}^2)b_i + \lambda_i\mu_i(c_i$$

$$-d_i) + \{-(1-\lambda)\mathrm{L}_x\mu_i + \mathrm{L}y\lambda_i\}e_i + (1-\lambda)\mathrm{L}_x\mathrm{L}_y\cdot f_i + \lambda_j\mu_j$$

$$(c_j - f_j) - (\lambda_j{}^2 - \mu_j{}^2)b_j\Big] + \frac{(1-\lambda)\mathrm{L}_x{}^2\mathrm{L}_y}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k}$$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{E}_o}(\lambda_i a_i + \mu_i e_i + \mathrm{L}_y f_i + \lambda_j a_j + \mu_j e_j) - \frac{\mathrm{L}x\mathrm{L}y}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k}$$

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{E}_o}\{-2(1-\lambda)\mathrm{L}_x\mu_i a_i - 2\lambda_i\mu_i b_i + \mu_i{}^2 c_i + \lambda_i{}^2 d_i + 2(1$$

$$-\lambda)\mathrm{L}_x\lambda_i e_i + (1-\lambda)^2\mathrm{L}_x{}^2 f_i + \mu_j{}^2 c_j - 2\lambda_j\mu_j b_j + \lambda_j{}^2 d_j\}$$

$$+\frac{\mathrm{L}_x{}^3}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k} + \frac{(1-\lambda)^2\mathrm{L}_x{}^2}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k}$$

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{E}_o}(\mu_i a_i - \lambda_i e_i - (1-\lambda)\mathrm{L}_x f_i + \mu_j a_j - \lambda_j e_j)$$

$$-\frac{\mathrm{L}_x{}^2}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_i} + \frac{(1-\lambda)\mathrm{L}x^2}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k}$$

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{E}_o}(f_i + f_j) + \frac{\mathrm{L}_x}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_k} + \frac{\mathrm{L}x}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_j} + \frac{\mathrm{L}_x}{4\mathrm{E}_o\mathrm{I}_o k_l}$$

$$a_i = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{I}_o}\left(-2\sin\frac{\beta_i}{2} + \beta_i\frac{\beta_i}{2}\right), \ (a_j\ ;\ i \to j)$$

$$b_i = \frac{\mathrm{R}_o{}^2}{\mathrm{I}_o}\left(-1 + \frac{\beta_i}{2}\sin\beta_i + \cos\beta_i\right), \ (b_j\ ;\ i \to j)$$

$$c_i = \frac{\mathrm{R}_o{}^2}{\mathrm{I}_o}\left(\beta_i - \frac{3}{2}\sin\beta_i - \frac{\beta_i}{2}\cos\beta_i\right) + \frac{1}{\mathrm{A}_o}\left(\frac{\beta_i}{2} + \frac{1}{2}\sin\beta_i\right),$$

$$(c_j\ ;\ i \to j)$$

$$d_i = \frac{\mathrm{R}_o{}^2}{\mathrm{I}_o}\left(\beta_i - \frac{1}{2}\sin\beta_i - \frac{\beta_i}{2}\cos\beta_i\right) + \frac{1}{\mathrm{A}_o}\left(\frac{\beta_i}{2} - \frac{1}{2}\sin\beta_i\right),$$

$$(d_j\ ;\ i \to j)$$

$$e_i = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{I}_o}\beta_i\sin\beta_i, \ (e_j\ ;\ i \to j)$$

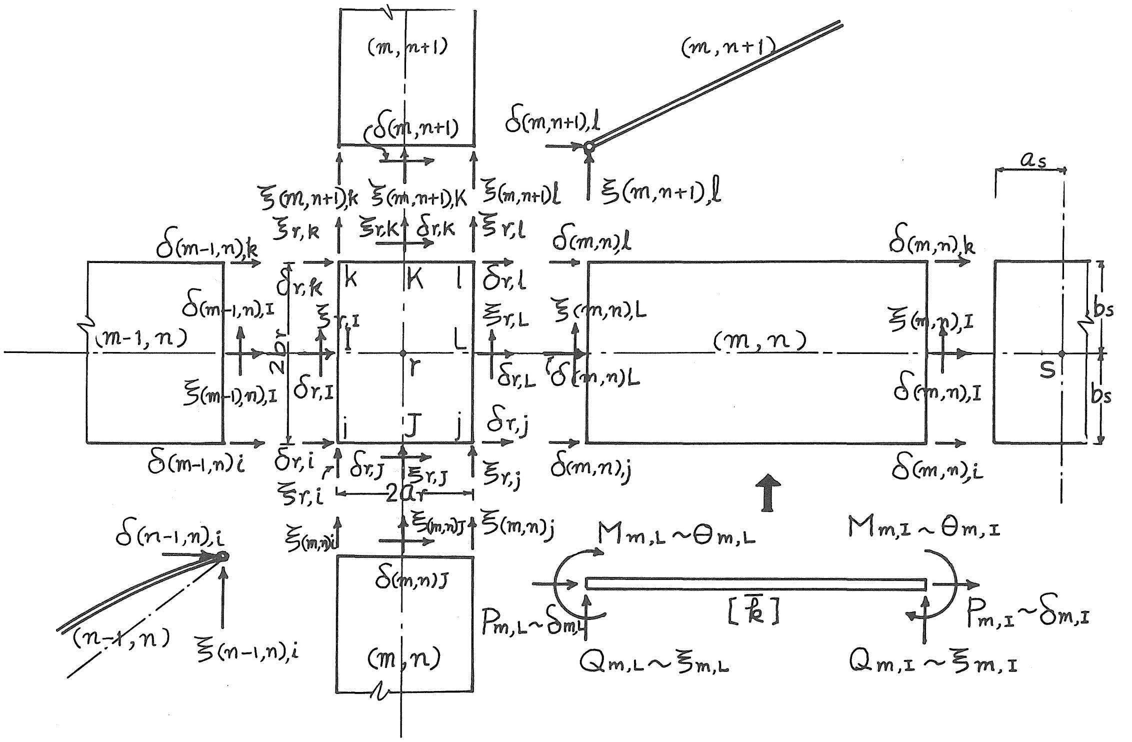
$$f_i = \frac{\mathrm{R}_o}{\mathrm{I}_o}\beta_i, \ (f_i\ ;\ i \to j)$$

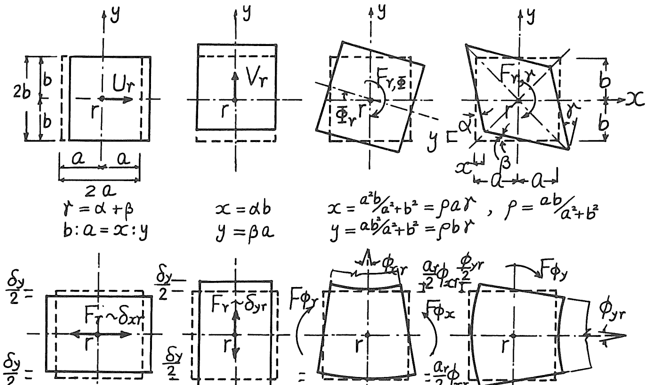
$$
\begin{Bmatrix} \delta_{ri} \\ \xi_{ri} \\ \delta_{rj} \\ \xi_{rj} \\ \delta_{rk} \\ \xi_{rk} \\ \delta_{rl} \\ \xi_{rl} \\ \delta_{r\mathrm{I}} \\ \xi_{r\mathrm{I}} \\ \delta_{r\mathrm{J}} \\ \xi_{r\mathrm{J}} \\ \delta_{r\mathrm{K}} \\ \xi_{r\mathrm{K}} \\ \delta_{r\mathrm{L}} \\ \xi_{r\mathrm{L}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -b & \rho a & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2b}\nu & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & 1 & a & \rho b & \frac{b}{2a}\nu & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ 1 & \cdot & -b & \rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a}{2b}\nu & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & 1 & -a & -\rho b & \frac{d}{2a}\nu & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & \cdot & b & -\rho a & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2b}\nu & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & 1 & a & \rho a & -\frac{b}{2a}\nu & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 1 & \cdot & b & -\rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a}{2b}\nu & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & 1 & -a & -\rho b & -\frac{b}{2a}\nu & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2b}\nu & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & a & \rho b & \cdot & \cdot & \frac{a}{2} & \cdot \\ 1 & \cdot & -b & \rho a & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b}{2} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \frac{b}{2a}\nu & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & b & -\rho a & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b}{2} \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -\frac{b}{2a}\nu & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & -\frac{a}{2b}\nu & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -a & -\rho b & \cdot & \cdot & \frac{a}{2} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{U}_r{}^{\mathrm{P}} \\ \mathrm{V}_r{}^{\mathrm{P}} \\ \phi_r{}^{\mathrm{P}} \\ \gamma_r{}^{\mathrm{P}} \\ \delta_{xr}{}^{\mathrm{P}} \\ \delta_{yr}{}^{\mathrm{P}} \\ \phi_{xr}{}^{\mathrm{P}} \\ \phi_{yr}{}^{\mathrm{P}} \end{Bmatrix} \quad (10)
$$

3.3.　接合部パネルの変形を考慮した解析　：　柱・梁接合部パネルのせん断，曲げおよび軸方向力による変形を考慮した解析法をマトリックス法によって誘導する。すなわち接合部パネルの各変形形態を設定し，それらの代表的な変位と接合部パネル周辺および柱・梁・筋違等の各部材の変位の適合性を考慮しつつ，外力と接合部パネルの代表的変位の関係を導く。

通常部材は線材として解析するが，ここでは幅のある置換モデルに変換し，この置換モデルと接合部パネル周辺との適合条件を満足させる。いま図５に示す接合部における接合部パネル部分の変位形態を図６のように設定する。

いま節点 r の接合部パネルの中心における代表変位と接合部パネル端の適合条件式は，⑽式で表される。





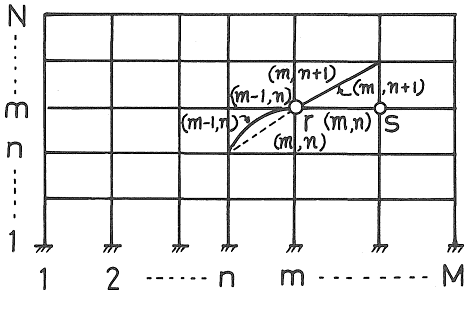


図５　接合部パネル周辺変位と材端変位

図６　接合部パネルの変位形態図

$$\{\delta_r\}^{\mathrm{P}}=[\beta_r]^{\mathrm{P}}\{u_r\}^{\mathrm{P}},\quad（節点 r において）\qquad (10')$$

ここに，$\{\delta_r\}^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル周辺の変位

$\{u_r\}^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル中心の変位

$[\beta_r]^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル中心と周辺の適合マトリックス

次に節点 r に関する接合部パネル周辺と部材の適合条件は，

$$\{\delta_r\}=[\alpha_{\mathrm{IJ}}]\{\delta_r\}^{\mathrm{P}}\ （節点 r において）\qquad (11)$$

ここに，$\{\delta_r\}$ ：各部材端の変位

$\{\delta_r\}^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル周辺の変位

$[\alpha_{\mathrm{IJ}}]$ ：接合部パネル周辺と部材の適合マトリックス

で表される。

節点 r における接合部パネル中心の変位と，接合部パネル周辺の適合条件を全体の架構について計算すれば，(10')式より(12)式のように表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix}\{\delta_1\}^{\mathrm{P}}\\ \{\delta_2\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\delta_r\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\delta_R\}^{\mathrm{P}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[\beta_1] & & & & & \\ & [\beta_2] & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & [\beta_r] & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & [\beta_R]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\mathrm{U}_1\}^{\mathrm{P}}\\ \{\mathrm{U}_2\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\mathrm{U}_r\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\mathrm{U}_R\}^{\mathrm{P}}\end{Bmatrix}\qquad (12)$$

$$\{\delta\}^{\mathrm{P}}=[\beta]^{\mathrm{P}}\{\mathrm{U}\}^{\mathrm{P}}\qquad (12')$$

ここに，$\{\delta\}^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル周辺の変位の全て

$[\beta]^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル周辺と中心の適合マトリックス

$\{u\}^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネル中心の変位

R＝(N，M)：節点すべての総和

接合部パネル周辺部の四隅における応力と変位の関係は仮想仕事式より(13)式で表される。

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{P}_{r,i}\\ \mathrm{Q}_{r,i}\\ \mathrm{P}_{r,j}\\ \mathrm{Q}_{r,j}\\ \mathrm{P}_{r,k}\\ \mathrm{Q}_{r,k}\\ \mathrm{P}_{r,l}\\ \mathrm{Q}_{r,l}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}{}^{r} & k_{12}{}^{r}\\ k_{21}{}^{r} & k_{22}{}^{r}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{ri}\\ \xi_{ri}\\ \delta_{rj}\\ \xi_{rj}\\ \delta_{rk}\\ \xi_{rk}\\ \delta_{rl}\\ \xi_{rl}\end{Bmatrix}\qquad (13)$$

$$\{\mathrm{P}_r\}^{\mathrm{P}}=[k_r]^{\mathrm{P}}\{\delta_r\}^{\mathrm{P}}\qquad (13')$$

ここに，P_{ri}，Q_{ri}，……：接合部パネルの四隅の応力

δ_{ri}，ζ_{ri}，……：接合部パネルの四隅の変位

$[\mathrm{K}_r]^{\mathrm{P}}$ ：接合部パネルの剛性マトリックス

(13)式は節点 r における釣合いの関係式で，架構全体に対しては，(14)式のように表される。

$$\begin{Bmatrix}\{\mathrm{P}_1\}^{\mathrm{P}}\\ \{\mathrm{P}_2\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\mathrm{P}_r\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\mathrm{P}_R\}^{\mathrm{P}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[k_1]^{\mathrm{P}} & & & & & \\ & [k_2]^{\mathrm{P}} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & [k_r]^{\mathrm{P}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & [k_k]^{\mathrm{P}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\delta_1\}^{\mathrm{P}}\\ \{\delta_2\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\delta_r\}^{\mathrm{P}}\\ \vdots\\ \{\delta_R\}^{\mathrm{P}}\end{Bmatrix}\qquad (14)$$

$$\{\mathrm{P}\}^{\mathrm{P}}=[k]^{\mathrm{P}}\{\delta\}^{\mathrm{P}}\qquad (14')$$

ここに，R＝(N，M)：節点すべての総和

部材の材端力と材端変位の関係は次のようになる。いま図5における梁部材（m，n）について考察する。図7における曲げ，せん断および軸方向力の各変形を考慮した部材(A)の剛性マトリックスは，(15)式で表される。

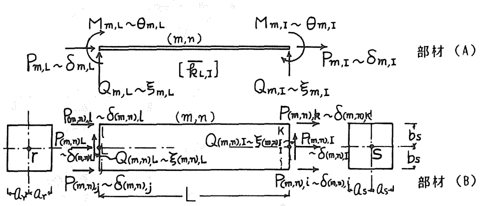


図7

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{P}_{mL}\\ \mathrm{Q}_{mL}\\ \mathrm{M}_{mL}\\ \mathrm{P}_{ml}\\ \mathrm{Q}_{ml}\\ \mathrm{M}_{ml}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{A_NE}}{\mathrm{L}}\Delta & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{A_NE}}{\mathrm{L}}\Delta & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & 0 & -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}}\\ 0 & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}^3}{3\mathrm{EI}}(1+k) & 0 & \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}^3}{6\mathrm{EI}}(1-2k)\\ \frac{\mathrm{A_NE}}{\mathrm{L}} & 0 & 0 & \frac{\mathrm{A_NE}}{\mathrm{L}}\Delta & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & 0 & \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}}\\ 0 & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}^3}{6\mathrm{EI}}(1-2k) & 0 & \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}^3}{3\mathrm{EI}}(1+k)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{mL}\\ \xi_{mL}\\ \theta_{mL}\\ \delta_{ml}\\ \xi_{ml}\\ \theta_{ml}\end{Bmatrix}\qquad (15)$$

または，$\{\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{LI}}\}=[\overline{k}_{\mathrm{LI}}]\{\delta_{\mathrm{LI}}\}$　　(15')

ここに，$\mathrm{A_N}$ ：部材の断面積（軸方向力に対して），

E ：ヤング係数，I ：断面2次モーメント，

K ：弾性形状係数，β ：塑性係数，

$\mathrm{A_R}$ ：部材の断面積（せん断力に対して），

$$k=\frac{3\kappa\mathrm{EI}}{\mathrm{A_R}\beta\mathrm{GL}^2},\ \Delta=\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}}\right)^2\left(1+\frac{12\kappa\mathrm{EI}}{\beta\mathrm{GA_R}\mathrm{L}^2}\right)\Big/12$$

一方，部材(A)と部材(B)との平衡方程式は，(16)式で表される。

$$
\begin{Bmatrix} P_{(m,n)i} \\ Q_{(m,n)i} \\ P_{(m,n)j} \\ Q_{(m,n)j} \\ P_{(m,n)k} \\ Q_{(m,n)k} \\ P_{(m,n)l} \\ Q_{(m,n)l} \\ P_{(m,n)\mathrm{I}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{I}} \\ P_{(m,n)\mathrm{J}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{J}} \\ P_{(m,n)\mathrm{k}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{k}} \\ P_{(m,n)\mathrm{L}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{L}} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2b_s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{1}{2b_r} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2b_s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{2b_r} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} P_{m,\mathrm{L}} \\ Q_{m,\mathrm{L}} \\ M_{m,\mathrm{L}} \\ P_{m,\mathrm{I}} \\ Q_{m,\mathrm{I}} \\ M_{m,\mathrm{I}} \end{Bmatrix}
\tag{16}
$$

または，$\{P_{\mathrm{LI}}\} = [\,\alpha_{\mathrm{LI}}\,]^{\mathrm{T}}\{\bar{P}_{\mathrm{LI}}\}$　　(16’)

さらに，部材(A)と部材(B)の適合条件式は(17)式で表される。

$$
\begin{Bmatrix} \delta_{m\mathrm{L}} \\ \xi_{m\mathrm{L}} \\ \theta_{m\mathrm{L}} \\ \delta_{m\mathrm{I}} \\ \xi_{m\mathrm{I}} \\ \theta_{m\mathrm{I}} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{2b_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2b_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-\frac{1}{2b_s} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2b_s} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \delta_{(m,n)i} \\ \xi_{(m,n)i} \\ \delta_{(m,n)j} \\ \xi_{(m,n)j} \\ \delta_{(m,n)k} \\ \xi_{(m,n)k} \\ \delta_{(m,n)l} \\ \xi_{(m,n)l} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{I}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{I}} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{J}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{J}} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{K}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{K}} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{L}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{L}} \end{Bmatrix}
\tag{17}
$$

または，$\{\bar{\delta}_{\mathrm{LI}}\} = [\alpha_{\mathrm{LI}}]\{\delta_{\mathrm{LI}}\}$　　(17’)

(15)，(16)式および(17)式より(18)式が得られる。

$$\{P_{\mathrm{LI}}\} = [k_{\mathrm{LI}}]\{\delta_{\mathrm{LI}}\}\ （梁材に対して） \tag{18}$$

ここに，$[\,k_{\mathrm{LI}}\,] = [\,\alpha_{\mathrm{LI}}\,]^{\mathrm{T}}[\,\bar{k}_{\mathrm{LI}}\,][\,\alpha_{\mathrm{LI}}\,]$

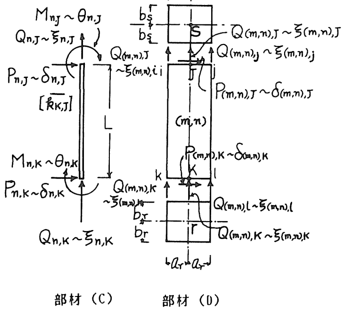


図８　柱材と接合部パネル端の力と変位

柱材についても梁材と同様にして求めることができる。すなわち図８において，曲げ，せん断および軸方向力の各変形を考慮した部材(C)の剛性マトリックスは次のようになる。

$$
\begin{Bmatrix} P_{n\mathrm{K}} \\ Q_{n\mathrm{K}} \\ M_{n\mathrm{K}} \\ P_{n\mathrm{J}} \\ Q_{n\mathrm{J}} \\ M_{n\mathrm{J}} \end{Bmatrix}
= \frac{1}{\varDelta}
\begin{bmatrix}
\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & \cdot & \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & -\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & \cdot & \frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} \\
\cdot & \frac{\mathrm{A_N E}}{\mathrm{L}}\varDelta & \cdot & \cdot & -\frac{\mathrm{A_N E}}{\mathrm{L}}\varDelta & \cdot \\
\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \cdot & \frac{\mathrm{L}^3}{3\mathrm{EI}}(1+k) & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \cdot & \frac{\mathrm{L}^2}{6\mathrm{EI}}(1-2k) \\
-\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & \cdot & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{EI}} & \cdot & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} \\
\cdot & -\frac{\mathrm{A_N E}}{\mathrm{L}}\varDelta & \cdot & \cdot & \frac{\mathrm{A_N E}}{\mathrm{L}}\varDelta & \cdot \\
\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \cdot & \frac{\mathrm{L}^3}{6\mathrm{EI}}(1-2k) & -\frac{\mathrm{L}^2}{2\mathrm{EI}} & \cdot & \frac{\mathrm{L}^3}{3\mathrm{EI}}(1+k)
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \delta_{n\mathrm{K}} \\ \xi_{n\mathrm{K}} \\ \theta_{n\mathrm{K}} \\ \delta_{n\mathrm{J}} \\ \xi_{n\mathrm{J}} \\ \theta_{n\mathrm{J}} \end{Bmatrix}
\tag{19}
$$

または，$\{\bar{P}_{\mathrm{KJ}}\} = [\,\bar{k}_{\mathrm{KJ}}\,]\{\bar{\delta}_{\mathrm{KJ}}\}$　　(19’)

ここに，$\mathrm{A_N}$，I，k，……：(15)式参照。

また，部材(C)と部材(D)の平衡方程式はマトリックス表示をすれば(20)式で表される。

$$
\begin{Bmatrix} P_{(m,n)i} \\ Q_{(m,n)i} \\ P_{(m,n)j} \\ Q_{(m,n)j} \\ P_{(m,n)k} \\ Q_{(m,n)k} \\ P_{(m,n)l} \\ Q_{(m,n)l} \\ P_{(m,n)\mathrm{I}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{I}} \\ P_{(m,n)\mathrm{J}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{J}} \\ P_{(m,n)\mathrm{K}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{K}} \\ P_{(m,n)\mathrm{L}} \\ Q_{(m,n)\mathrm{L}} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2a_s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2a_s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{2a_r} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -\frac{1}{2a_r} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} P_{n\mathrm{K}} \\ Q_{n\mathrm{K}} \\ M_{n\mathrm{K}} \\ P_{n\mathrm{J}} \\ Q_{nf} \\ M_{n\mathrm{J}} \end{Bmatrix}
\tag{20}
$$

または，$\{P_{\mathrm{KJ}}\} = [\,\alpha_{\mathrm{KJ}}\,]^{\mathrm{T}}[\bar{P}_{\mathrm{KJ}}\,]$　　(20’)

部材(C)と部材(D)の適合条件式は(21)式で表される。

$$
\begin{Bmatrix} \delta_{n\mathrm{K}} \\ \xi_{nk} \\ \theta_{n\mathrm{K}} \\ \delta_{n\mathrm{J}} \\ \xi_{nJ} \\ \theta_{n\mathrm{J}} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2a_r} & \cdot & -\frac{1}{2a_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{2a_s} & \cdot & -\frac{1}{2a_s} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \delta_{(m,n)i} \\ \xi_{(m,n)i} \\ \delta_{(m,n)j} \\ \xi_{(m,n)j} \\ \delta_{(m,n)k} \\ \xi_{(m,n)k} \\ \delta_{(m,n)l} \\ \xi_{(m,n)l} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{I}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{I}} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{J}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{J}} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{K}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{K}} \\ \delta_{(m,n)\mathrm{L}} \\ \xi_{(m,n)\mathrm{L}} \end{Bmatrix}
\tag{21}
$$

または，$\{\bar{\delta}_{KJ}\} = [\alpha_{KJ}]\{\delta_{KJ}\}$　　(21')

依って，(19)，(20)式および(21)式より(22)式が得られる。

$$\{P_{KJ}\} = [k_{KJ}]\{\delta_{KJ}\} \qquad (22)$$

ここに，$[k_{KJ}] = [\alpha_{KJ}]^T\ [\bar{k}_{KJ}]\,[\alpha_{KJ}]$

筋違材に対しては，図9において，接合部パネルとピン接合とすれば，応力と変位の関係は(23)式となる。

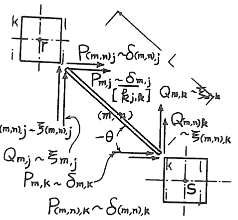


図9　筋違と接合部パネル端の力と変位

$$\begin{Bmatrix} P_{mj} \\ Q_{mj} \\ M_{mj} \\ P_{mk} \\ Q_{mk} \\ M_{mk} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \cdot & -\lambda^2 & -\lambda\mu & \cdot \\ \lambda\mu & \mu^2 & \cdot & -\lambda\mu & -\mu^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \cdot & \lambda^2 & \lambda\mu & \cdot \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \cdot & \lambda\mu & \mu^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_{mj} \\ \xi_{mj} \\ \cdot \\ \delta_{mk} \\ \xi_{mk} \\ \cdot \end{Bmatrix} \qquad (23)$$

または，$\{\bar{P}_{jk}\} = [\bar{k}_{jk}]\{\bar{\delta}_{jk}\}$　　(23')

筋違材の場合は，平衡方程式および適合条件式は図9よりあきらかなように，それぞれのマトリックスは単位マトリックスとなるので，

$$\{P_{jk}\} = [I]^T\{\overline{P_{jk}}\}$$

$$\{\overline{\delta_{jk}}\} = [I]\{\overline{\delta_{jk}}\}$$

$$\{P_{jk}\} = [I]^T[\overline{k_{jk}}][I]\{\delta_{jk}\} = [\overline{k_{jk}}]\{\delta_{jk}\} \qquad (24)$$

となる。

全架構に対する応力と変位の関係は，全架構に対して仮想仕事の原理を適用すれば得られる。いま仮想変位，$\{U^*\}$による外力$\{F\}$のなす仕事をWeとすれば，(25)式で表される。

$$We = \{U^*\}\{F\} \qquad (25)$$

ここに，

$$\{U^*\} = \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U_r \\ \vdots \\ U_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \varPhi_1 \\ \varUpsilon_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_R \\ V_R \\ \varPhi_R \\ \varUpsilon_R \end{Bmatrix},\quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1U} \\ F_{1V} \\ F_{1\varPhi} \\ F_{1\varUpsilon} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{RU} \\ F_{RV} \\ F_{R\varPhi} \\ F_{R\varUpsilon} \end{Bmatrix}$$

一方，仮想変位$\{U^*\}$によって内力のなす仕事W_{IN}は次のようになる。

$$W_{IN} = \sum_{I=1}^{R}[\{\delta_I^*\}\{P_I\} + \sum_{I,J}\{\delta_{IJ}^*\}\{P_{IJ}\}] \qquad (26)$$

（接合部パネル）　（部材）

ここに，R：節点の数，

$\sum_{I,J}$：パネルに接続する部材の数

接合部パネルの変位は（10'）式より，

$$\{\delta_I\}^P == [\beta_I]^P\{U\} \qquad (27)$$

$$\{\delta_I\}^{PT} = \{U\}^T[\beta_I]^{PT}$$

$$\{\delta_I^*\}^{PT} = \{U^*\}^T[\beta_I]^{PT}$$

部材端の変位と接合部パネル周辺の変位は(11)式および(27)式より，(28)式となる。

$$\{\delta_{IJ}\} = [\alpha_{IJ}]\{\delta_I\}^P = [\alpha_{IJ}][\beta_I]^P\{u\} \qquad (28)$$

$$\{\delta_{IJ}\}^T = \{U\}^T\{\beta_I\}^P[\alpha_{IJ}]^T$$

$$\{\delta_{IJ}^*\}^T = \{U^*\}^T[\beta_I]^P[\alpha_{IJ}]^T$$

接合部パネルの応力と変位の関係は(13)式および(27)式より，

$$\{P_I\}^P = [k_I]^P\{\delta_I\} = [k_I]^P[\beta_I]^P\{U\} \qquad (29)$$

となる。さらに，部材の応力と変位の関係は，(18)，(20)，(22)式および(28)式より(30)式となる。

$$\{P_{IJ}\} = [k_{IJ}]\{\delta_{IJ}\} = [k_{IJ}][\alpha_{IJ}][\beta_I]^P\{U\} \qquad (30)$$

よって，内力のなす仕事W_{IN}は次のように表される。

$$W_{IN} = \{U^*\}^T[\sum_{I=1}^{R}[K_I]^P + \sum_{I,J}[K_{IJ}]]\{U\} \qquad (31)$$

仮想仕事の原理より，$We = W_{IN}$であるから，

$$\{F\} = \sum_{I=1}^{R}[[K_I]^P + \sum_{I,J}[K_{IJ}]]\{U\} = [K]\{U\} \qquad (32)$$

ここに，

$[K_1]^P = [\beta_1]^{PT}[k_I]^P[\beta_I]^P$

：接合部パネルの剛性マトリックス，

$[K_{IJ}] = [\beta_1]^{PT}[\alpha_{IJ}]^T[k_{IJ}][\alpha_{IJ}][\beta_I]^P$

：部材の剛性マトリックス，

$[K] = [K_I]^P + [K_{IJ}]$

：骨組全体こ剛性マトリックス，

となる。

さて，接合部パネルおよび部材の剛性マトリックスを計算すれば次のようになる。接合部パネルの変形は，図10に示すように伸縮による変形，せん断変形および曲げ変形である。接合部パネルの剛性マトリックスは，接合部パネルの釣合い力系において，仮想仕事法によって計算することができる。

いま接合部パネルの釣合い力系において，仮想変位，$\{\delta^*\}$を与えたときの仕事は次のように求められる。すなわち外力仕事Weは，

$$We = \{\delta^*\}^T\{P\} \qquad (33)$$

ここに，

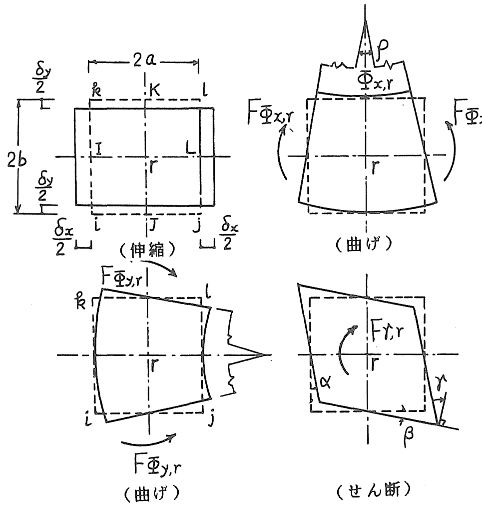


図10　接合部パネルの変形

$$\{\delta^*\}=\begin{Bmatrix}\delta_i{}^*\\ \xi_i{}^*\\ \delta_j{}^*\\ \xi_j{}^*\\ \delta_k{}^*\\ \xi_k{}^*\\ \delta_l{}^*\\ \xi_l{}^*\\ \delta_I{}^*\\ \xi_I{}^*\\ \delta_J{}^*\\ \xi_J{}^*\\ \delta_K{}^*\\ \xi_K{}^*\\ \delta_L{}^*\\ \xi_L{}^*\end{Bmatrix},\qquad \{P\}=\begin{Bmatrix}P_i\\ Q_i\\ P_j\\ Q_j\\ P_k\\ Q_k\\ P_l\\ Q_l\\ P_I\\ Q_I\\ P_J\\ Q_J\\ P_K\\ Q_K\\ P_L\\ Q_L\end{Bmatrix}$$

となる。内力仕事 W_{in} は，単位体積当りの仕事を ΔW_{in} とすれば，次のようになる。

$$W_{in}=\int_V \Delta W\varepsilon dV+\int_V \Delta W\phi_x dV+\int_V \Delta W\phi_y dV+\int_V \Delta W\gamma dV$$

$$=W\varepsilon+W\phi_x+W\phi_y+W\gamma \qquad (34)$$

ここに，$W\varepsilon$ ：接合部パネルの伸縮による仕事

$W\phi_x, W\phi_y$ ：接合部パネルの曲げ変形による仕事

$W\gamma$ ：接合部パネルのせん断変形による仕事

各変形による仕事を計算すれば次のようになる。

(1)　接合部パネルの伸縮による仕事（$W\epsilon$）：単位体積当りの仕事$\Delta W\varepsilon$ は次のように計算される。

$$\Delta W\varepsilon=-\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\} \qquad (35)$$

ここに，$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{Bmatrix}=\dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu\\ \nu&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{Bmatrix}=[D]\{\varepsilon\}$

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(\delta_L-\delta_I)/2a\\ (\delta_K-\delta_J)/2b\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-\frac{1}{2a}&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\frac{1}{2a}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&-\frac{1}{2b}&\cdot&\frac{1}{2b}&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \xi_i\\ \delta_j\\ \xi_j\\ \delta_k\\ \xi_k\\ \delta_l\\ \xi_l\\ \delta_I\\ \xi_I\\ \delta_J\\ \xi_J\\ \delta_K\\ \xi_K\\ \delta_L\\ \xi_L\end{Bmatrix}$$

さらに，$\{\varepsilon^*\}^T=\{\delta^*\}^T[B]^T$

となり，$\Delta W\varepsilon=-\{\delta^*\}^T[B]^T[D][B]\{\delta\}$

それゆえ，伸縮による仕事 $W\varepsilon$ は(36)式となる。

$$W\varepsilon=\iiint_V \Delta W\varepsilon dV=-\{\delta^*\}\iiint_V [B]^T[D][B]\{\delta\} \qquad (36)$$

仮想仕事の原理より外力仕事と内力仕事は $\{\delta^*\}$ の任意性によって成立するので，

$$\{P\}=\iiint_V [B]^T[D][B]dV\{\delta\}$$

$$=4abt\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{4a^2}&\cdot&\cdot&\frac{\nu}{4ab}&\cdot&\frac{\nu}{4ab}&\frac{1}{4a^2}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \frac{\nu}{4ab}&\cdot&\cdot&\frac{1}{4a^2}&\cdot&-\frac{1}{4b^2}&-\frac{\nu}{b}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ -\frac{\nu}{4ab}&\cdot&\cdot&-\frac{1}{4b^2}&\cdot&\frac{1}{4b^2}&\frac{\nu}{4ab}&\cdot\\ -\frac{1}{4a}&\cdot&\cdot&-\frac{\nu}{4ab}&\cdot&\frac{\nu}{4ab}&\frac{1}{4a^2}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_I\\ \xi_I\\ \delta_J\\ \xi_J\\ \delta_K\\ \xi_K\\ \delta_L\\ \xi_L\end{Bmatrix} \qquad (37)$$

$$=[k_P]\{\delta\}, \qquad (37')$$

となる。また骨組み全体に対する接合部パネルの剛性マトリックスは(32)式より，(38)式となる。

$$[K_I]^P=[\beta_I]^{PT}[k_I]^P[\beta_I]^P=Et\begin{bmatrix}\frac{b}{a}&-\nu\\ -\nu&\frac{a}{b}\end{bmatrix} \qquad (38)$$

(2)　曲げ変形による仕事（$W\phi_x$，$W\phi_y$）：曲げ変形による仕事は，接合部パネルの伸縮による仕事（$W\varepsilon$）を求めた場合と同様にして計算出来る。

結局，曲げ変形による仕事は(39)，(40)式となる。

$$F\phi_x=2btEI\Phi_x \qquad (39)$$

$$F\phi_y=2atEI\Phi_y \qquad (40)$$

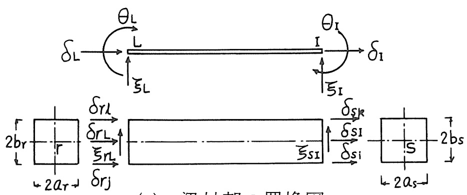
(3)　せん断変形による仕事（$W\gamma$）：せん断変形による仕事 $W\gamma$ も同様に仮想仕事の原理によって計算すれば得られる。すなわち(41)式となる。

$$F\gamma = 4abtG\Upsilon \tag{41}$$

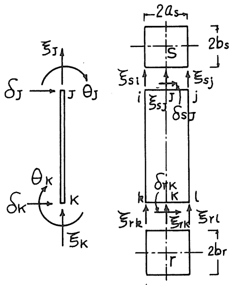
接合部パネルの伸縮，曲げ変形およびせん断変形を考慮した接合部パネルの剛性マトリックスは，(38)，(39)，(40)式および(41)式より，(42)式となる。

$$[K_r]^P = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4abtG & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Et\frac{b}{a} & -Et\nu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -Et\nu & Et\frac{a}{b} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2btEI & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2atEI \end{bmatrix} \tag{42}$$

部材の剛性マトリックスは次のように求められる。梁材の剛性マトリックスは，図11(a)のように変位関係を想定すれば，



(a) 梁材部の置換図



(b) 柱材部の置換図

図11 柱，梁部材の置換図

$$\begin{Bmatrix} \delta_L \\ \zeta_L \\ \theta_L \\ \delta_I \\ \xi_I \\ \theta_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{1}{2b_r} & \frac{1}{2b_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2b_s} & \frac{1}{2b_s} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{rj} \\ \delta_{rl} \\ \xi_{rL} \\ \zeta_{rL} \\ \delta_{si} \\ \delta_{sk} \\ \delta_{sI} \\ \xi_{sI} \end{Bmatrix} \tag{43}$$

$$\{\bar{\delta}_{LI}\} = [\alpha'_{LI}]\{\delta_{LI}\} \tag{43'}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_{rj} \\ \delta_{rl} \\ \delta_{rL} \\ \xi_{rL} \\ \delta_{si} \\ \delta_{sk} \\ \delta_{sI} \\ \xi_{sI} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & -b & \rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & b & -\rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a\nu}{2b} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} & -\frac{a\nu}{2b} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -a & -\rho b & \cdot & \cdot & \frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -b & \rho a & -\frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & b & -\rho a & -\frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a & \rho b & \cdot & \cdot & \frac{a}{2} & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ \phi_r \\ \gamma_r \\ \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \\ u_s \\ v_s \\ \phi_s \\ \gamma_s \\ \delta_{ys} \\ \phi_{xs} \\ \phi_{ys} \end{Bmatrix} \tag{44}$$

$$\{\delta_{LI}\} = [\beta'_{LI}]\{U\} \tag{44'}$$

となる。(43)，(44)式より，(45)式が得られる。

$$\{\bar{\delta}_{LI}\} = [\alpha'_{LI}][\beta'_{LI}]\{U\} \tag{45}$$

また，平衡方程式は，

$$\{F\} = [\beta'_{LI}]^T[\alpha'_{LI}]^T\{p\}$$

ここに，　$\{p\} = [\bar{k}_{LI}]\{\bar{\delta}_{LI}\}$

よって，

$$\{F\} = [\beta'_{LI}]^T[\alpha'_{LI}][\bar{k}_{LI}][\alpha'_{LI}][\beta'_{LI}]\{U\} \tag{46}$$

となり，骨組み全体の剛性マトリックスに対する梁材の剛性マトリックスは(46)式で求まる。

次に，柱材の剛性マトリックスは，図11(b)に示すように変位関係を想定すれば，(47)式で示される。

$$\begin{Bmatrix} \delta_K \\ \xi_K \\ \theta_K \\ \delta_J \\ \xi_J \\ \theta_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2a_r} & -\frac{1}{2a_r} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2a_s} & -\frac{1}{2a_s} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_{rk} \\ \xi_{rl} \\ \delta_{rK} \\ \xi_{rK} \\ \xi_{si} \\ \xi_{sj} \\ \delta_{sJ} \\ \xi_{sJ} \end{Bmatrix} \tag{47}$$

または，$\{\bar{\delta}_{KJ}\} = [\alpha'_{KJ}]\{\delta_{KJ}\}$ (47')

$$\begin{Bmatrix} \xi_{rk} \\ \xi_{rl} \\ \delta_{rK} \\ \xi_{rK} \\ \xi_{si} \\ \xi_{sj} \\ \delta_{sJ} \\ \xi_{sJ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & a & \rho b & -\frac{b\nu}{2a} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -a & -\rho b & -\frac{b\nu}{2a} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & b & b & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & -\frac{b\nu}{2a} & \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a & \rho b & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -a & -\rho b & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -b & \rho a & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{b}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ V_r \\ \phi_r \\ \gamma_r \\ \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \\ U_s \\ V_s \\ \phi_s \\ \gamma_s \\ \delta_{xs} \\ \delta_{ys} \\ \phi_{xs} \\ \phi_{ys} \end{Bmatrix}$$

--- (48)

$$\{\delta_{KJ}\} = [\beta'_{KJ}]\{U\} \tag{48'}$$

となる。(47), (48)式より，(49)式が得られる。

$$\{\bar{\delta}_{KJ}\} = [\alpha'_{KJ}][\beta'_{KJ}]\{U\} \tag{49}$$

また，平衡方程式は次式となる。

$$\{F\} = [\beta'_{KJ}]^T[\alpha'_{KJ}]^T\{\bar{P}\}$$

ここに，$\{\bar{P}\} = [\bar{k}_{KJ}]\{\bar{\delta}_{KJ}\}$

よって，

$$\{F\} = [\beta'_{KJ}][\alpha'_{KJ}]^T[\bar{k}_{KJ}][\alpha'_{KJ}][\beta'_{KJ}]\{U\} \tag{50}$$

となり，骨組み全体の剛性マトリックスに対する柱材の剛性マトリックスは，(50)式より求められる。

筋違の剛性マトリックスは，筋違の形式によって，節点の符号を①・Ⓙとすれば，右上がりと右下がりの２種類があり各々次のようになる。

(a) 右上がりの場合：図12(a)において，節点をピンとすれば，次のようになる。

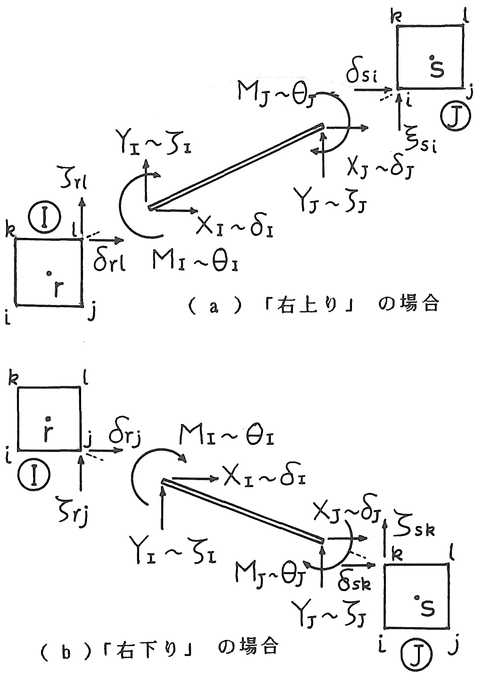


図12 筋違の置換図

$$\begin{Bmatrix} \delta_I \\ \zeta_I \\ \theta_I \\ \delta_J \\ \zeta_J \\ \theta_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{rl} \\ \zeta_{ri} \\ \delta_{si} \\ \zeta_{si} \end{Bmatrix} \tag{51}$$

$$\{\bar{\delta}_{IJ}\} = [\alpha_{IJ}]\{\delta_{IJ}\} \tag{51'}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_{rl} \\ \zeta_{rl} \\ \delta_{si} \\ \zeta_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & b & -\rho a & \frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -a & -\rho b & -\frac{b\nu}{2a} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -b & \rho a & \frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a & \rho b & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ V_r \\ \phi_r \\ \gamma_r \\ \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \\ U_s \\ V_s \\ \phi_s \\ \gamma_s \\ \delta_{xs} \\ \delta_{ys} \\ \phi_{xs} \\ \phi_{ys} \end{Bmatrix} \tag{52}$$

$$\{\delta_{IJ}\} = [\beta_{IJ}]\{U\} \tag{52'}$$

(51), (52)式より，(53)式が得られる。

$$\{\bar{\delta}_{IJ}\} = [\alpha_{IJ}][\beta_{IJ}]\{U\} \tag{53}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_I \\ \zeta_I \\ \theta_I \\ \delta_J \\ \zeta_I \\ \theta_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & b & -\rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a\nu}{2b} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & a & -\rho b & -\frac{b\nu}{2b} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -b & \rho a & -\frac{1}{2} & \frac{\nu a}{2b} & -\frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a & \rho b & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ V_r \\ \phi_r \\ \gamma_r \\ \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \\ U_s \\ V_s \\ \phi_s \\ \gamma_s \\ \delta_{xs} \\ \delta_{ys} \\ \phi_{xs} \\ \phi_{ys} \end{Bmatrix} \tag{54}$$

$$\{\bar{\delta}_{IJ}\} = [c_{IJ}]\{U\} \tag{54'}$$

となる。また平衡方程式より次式が得られる。

$$\{F\} = [\beta_{IJ}]^T[\alpha_{IJ}]^T\{p\} = [\beta_{IJ}]^T[\alpha_{IJ}]^T[\bar{k}_{IJ}]\{\bar{\delta}_{IJ}\} \tag{55}$$

$$= [c_{IJ}]^T[\bar{k}_{IJ}][c_{IJ}]\{U\}$$

それ故，骨組み全体に対する筋違材（右上がり）の剛性マトリックスは，(55)式で与えられる。

(b) 右下がりの場合：図12(b)において，節点をピンとすれば次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_I \\ \zeta_I \\ \theta_I \\ \delta_J \\ \zeta_J \\ \theta_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{rj} \\ \zeta_{rj} \\ \delta_{sk} \\ \zeta_{sk} \end{Bmatrix} \tag{56}$$

$$\{\bar{\delta}_{IJ}\} = [\alpha_{IJ}]\{\delta_{IJ}\} \tag{56'}$$

また，

$$
\begin{Bmatrix} \delta_{rj} \\ \zeta_{rj} \\ \delta_{sk} \\ \zeta_{sk} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & \cdot & -b & \rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -a & -\rho b & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & b & -\rho a & -\frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a & \rho b & -\frac{b\nu}{2a} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2}
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ V_r \\ \phi_r \\ \gamma_r \\ \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \\ U_s \\ V_s \\ \phi_s \\ \gamma_s \\ \delta_{xs} \\ \delta_{ys} \\ \phi_{xs} \\ \phi_{ys} \end{Bmatrix} \tag{57}
$$

$$\{\delta_{\mathrm{IJ}}\} = [\beta_{\mathrm{IJ}}]\{\mathrm{U}\} \tag{57'}$$

(56), (57)式より，

$$\{\delta_{\mathrm{IJ}}\} = [\alpha_{\mathrm{IJ}}][\beta_{\mathrm{IJ}}]\{\mathrm{U}\} \tag{58}$$

となる。さらに，

$$
\begin{Bmatrix} \delta_{\mathrm{I}} \\ \zeta_{\mathrm{I}} \\ \theta_{\mathrm{I}} \\ \delta_{\mathrm{J}} \\ \zeta_{\mathrm{J}} \\ \theta_{\mathrm{J}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}
1 & \cdot & -b & \rho a & \frac{1}{2} & -\frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & -a & -\rho a & \frac{b\nu}{2a} & -\frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & b & -\rho a & -\frac{1}{2} & \frac{a\nu}{2b} & \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & a & \rho b & -\frac{b\nu}{2a} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_r \\ V_r \\ \phi_r \\ \gamma_r \\ \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \\ U_s \\ V_s \\ \phi_s \\ \gamma_s \\ \delta_{xs} \\ \delta_{ys} \\ \phi_{xs} \\ \phi_{ys} \end{Bmatrix} \tag{59}
$$

$$\{\bar{\delta}_{\mathrm{IJ}}\} = [c_{\mathrm{IJ}}]\{\mathrm{U}\} \tag{59'}$$

また，平衡方程式より，

$$
\begin{aligned}
\{\mathrm{F}\} &= [\beta_{\mathrm{IJ}}]^{\mathrm{T}}[\alpha_{\mathrm{IJ}}]^{\mathrm{T}}\{p\} = [\beta_{\mathrm{IJ}}]^{\mathrm{T}}[\alpha_{\mathrm{IJ}}]^{\mathrm{T}}[\bar{k}_{\mathrm{IJ}}]\{\bar{\delta}_{\mathrm{IJ}}\} \\
&= [c_{\mathrm{IJ}}]^{\mathrm{T}}[\bar{k}_{\mathrm{IJ}}][c_{\mathrm{IJ}}]\{\mathrm{U}\}
\end{aligned} \tag{60}
$$

となり，骨組み全体に対する筋違材（右下がり）の剛性マトリックスは，(58)式でもとまる。

3.4. P⊿効果を考慮した解析：　構造物が非線形挙動をする場合，その原因は，構造材料の非線形性すなわち材料の応力度一歪度の関係の非線形性か，P⊿効果または幾何学的非線形による場合がある。本節では，P⊿効果による大たわみ問題を取り扱う。

大たわみの場合における剛性マトリックス[KL][3]は，

$$[\mathrm{KL}] = [\mathrm{Ke}] + \mathrm{Po}[\mathrm{Ko}] \tag{61}$$

ここに，[KL]：大たわみの場合の剛性マトリックス，
[Ke]：微小変位（弾性）の場合の剛性マトリックス，
[Po]：軸方向力，
[Ko]：P⊿効果による非線形項の剛性マトリックス，

で表される。従って構造物が大変形をする場合において，ある荷重段階における増分荷重と増分変位の関係は(61)式で求められる。

$$[\varDelta \mathrm{P}] = [\mathrm{KL}]\{\varDelta \mathrm{U}\} \tag{62}$$

ここに，[⊿P]：増分荷重
{⊿U}：増分変位

弾性挙動をする骨組が大たわみをおこす場合に，曲げねじれ等の影響を無視すれば，部材に生じる歪 $\{\varepsilon\}$ は，その前段階までの歪 $\{\varepsilon_o\}$ と，次の歪増分 $\{\varepsilon_a\}$ との和として表される。

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_o\} + \{\varepsilon_a\} \tag{63}$$

変形前（n 段階）と変形後（$(n-1)$ 段階）の座標と変位の関係を図13のように表すと，歪と変位の関係は次のようになる。

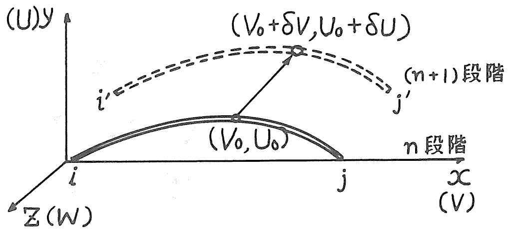


図13　座標と変位

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_o &= \frac{dv_o}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_o}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2u_o}{dx^2} \\
\varepsilon &= \frac{d(v_o+\delta v)}{dx} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dx}(u_o+\delta u)\right\}^2 - y\frac{d^2}{dx^2}(u_o+\delta u) \\
\varepsilon_a &= \varepsilon - \varepsilon_o = \frac{d(\delta v)}{dx} + \frac{du_o}{dx}\frac{d(\delta u)}{dx} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d(\delta u)}{dx}\right\}^2 \\
&\quad - y\frac{d^2(\delta u)}{dx^2}
\end{aligned}
$$

ここで，上式の第2項は各荷重増分に対する項で，部材が真直であると仮定できれば無視できる。

さて，部材に貯えられる歪エネルギーUは，図14において，

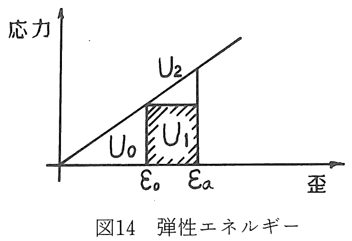


図14　弾性エネルギー

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_o + \mathrm{U}_a = \mathrm{U}_o + \mathrm{U1} + \mathrm{U2} \tag{64}$$

ここに，U_o：求める荷重段階までの歪エネルギー

$$\mathrm{U1} = \mathrm{E}\iiint \varepsilon_o \varepsilon_a \, dx\,dy\,dz$$

$$\mathrm{U2} = \frac{\mathrm{E}}{2}\iiint (\varepsilon_a)^2 \, dx\,dy\,dz$$

となる。部材の剛性行列 $[K_{ij}]$ は Castigliano の第一定理から求められ，(65)式となる。

$$[K_{ij}]=\frac{\partial^2 U_a}{\partial U_i \partial U_j} \tag{65}$$

剛性マトリックス（大たわみの剛性マトリックス）を計算した結果は次のようになる。

$$[K_o]=\left[\begin{array}{cccccc}
\frac{6}{5L} & \cdot & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \cdot & \frac{1}{10} \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & \frac{2}{15}L & -\frac{1}{10} & \cdot & -\frac{L}{30} \\
 & & & \frac{6}{5L} & \cdot & \frac{1}{10} \\
 & & & & \cdot & \cdot \\
 & \text{SYM.} & & & & \frac{2}{15}L
\end{array}\right]$$

$$[K_e]=E\left[\begin{array}{cccccc}
\frac{12I}{L^3} & \cdot & \frac{6I}{L^3} & -\frac{12I}{L^2} & \cdot & \frac{6I}{L^2} \\
\cdot & \frac{A}{L} & \cdot & \cdot & -\frac{A}{L} & \frac{2I}{L} \\
 & & \frac{4I}{L} & -\frac{6I}{L^2} & \cdot & \frac{2I}{L} \\
 & & & \frac{12I}{L^3} & \cdot & -\frac{6I}{L^2} \\
 & & & & \frac{A}{L} & \cdot \\
 & \text{SYM.} & & & & \frac{4I}{L}
\end{array}\right]$$

ここに，L：部材長，I：断面２次モーメント，
　　　A：断面積

部材の応力度が弾性範囲をこえ，塑性領域に入った場合については，単純塑性理論より導く。すなわち塑性領域における増分荷重と増分変位の関係は，塑性ヒンジの理論により，増分外力 $\{\varDelta F\}$ に対して，増分応力 $\{\varDelta M_{ij}\}=0$ とし，増分回転角 $\{\varDelta\Theta_{ij}\}$ を消去した剛性マトリッを(66)式のように求める。

$$\{\varDelta P\}=[\,[Kp]+Po[Kop]\,]\{\varDelta u\} \tag{66}$$

ここに，$[Kp]$　：弾塑性剛性マトリックス
　　　$[Kop$　：塑性領域を含む $P\varDelta$ 効果による非線形項の剛性マトリックス

さて，部材が塑性領域に入ったときの非線形項の剛性マトリックスは，図15において各節点の状態によって次のようになる。

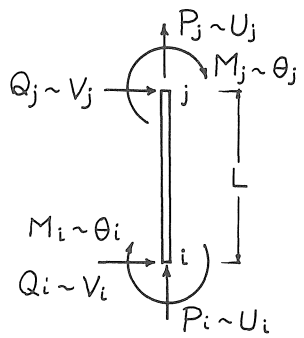


図15　部材の応力と変位

(1)　i 端はヒンジ，j 端は剛

$$[Kop]=\left[\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{9}{8L} & \cdot & \cdot & -\frac{9}{8L} & -\frac{1}{8} \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \text{SYM.} & & & \frac{9}{8L} & \frac{1}{8} \\
 & & & & & \frac{L}{8}
\end{array}\right]$$

(2)　j 端はヒンジ，i 端は剛

$$[Kop]=\left[\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \frac{9}{8L} & -\frac{1}{8} & \cdot & -\frac{9}{8L} & \cdot \\
 & & \frac{L}{8} & \cdot & \frac{1}{8} & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \frac{9}{8L} & \cdot \\
 & \text{SYM.} & & & & \cdot
\end{array}\right]$$

(3)　i 端，j 端ともにヒンジ

$$[Kop]=\left[\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \frac{1}{L} & \cdot & \cdot & -\frac{1}{L} & \cdot \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \text{SYM.} & & & \frac{1}{L} & \cdot \\
 & & & & & \cdot
\end{array}\right]$$

3.5.　弾塑性解析：弾塑性解析における解析の前提条件は次のようにする。

(1)　部材の変形は軸方向力による変形，曲げ変形およびせん断変形を考慮する。

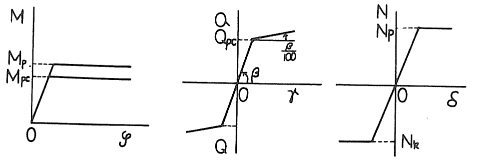
(2)　接合部パネルの変形はせん断変形を考慮する。

(3)　柱部材の PΔ 効果の影響を考慮する。

(4)　曲げモーメントと曲率の関係は図16(a)に示すように完全弾塑性型とする。

(5)　せん断力とせん断歪の関係は図16(b)に示すように Bi-Linear 型とする。

(6)　軸方向力と軸方向歪の関係は図16(c)に示すように完全弾塑性型とする。



(a) 曲げモーメントと曲率　(b) せん断力とせん断歪　(c) 軸方向力と軸方向歪

図16　曲げモーメント，せん断力および軸方向力と夫々の歪の関係

尚図16において，Mp は全塑性モーメント，Mpc は軸方向力の作用するときの全塑性モーメント，Qpc は全塑性せん断力，Np は全塑性軸方向力および Nk はオイラーのの座屈荷重である。

降伏条件として，柱および筋違は曲げモーメントと軸方向力との相関関係，図１によって降伏する。また梁は曲げモーメントによって降伏する。更に接合部パネルはせん断降伏を考慮し，筋違は軸方向力による降伏を考慮する。

解析は荷重増分法により，水平荷重を漸次増分させ，PΔ 効果を考慮し，各増分ステップ毎に座標変換を行い解析する。

4．結論

本論文においては，構造物の弾塑性解析法が詳述された。すなわち，

(1)　構造物の弾塑性解析法に関して，曲げモーメントと曲率の関係を完全弾塑性とし，単純塑性解析法を柱･梁接合部パネルのせん断変形，PΔ 効果の影響を無視した場合について示した，

(2)　曲線材を有する一般の構造物について，柱・梁接合部パネルのせん断，曲げおよび軸方向力による変形ならびに PΔ 効果による幾何学的非線系の影響等を考慮した弾塑性解析法について詳述した。

(3)　本論文に示される解析法によれば，通常の骨組構造物の保有耐力（終局耐力）を厳密に計算できる。

参考文献

1）小高昭夫，堀江文雄：マトリックスを用いた骨組解析の一考察；日本鋼構造協会第３回大会講演論文集，昭和44年５月

2）R. K. Livesley 著，山田嘉昭，川井忠彦共訳：マトリックス構造解析入門，p.88-p.91；培風館，昭和43年9月

3）上田幸雄，赤松毅人，近江義夫：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析；日本造船協会論文集 126号，1969年12月

謝辞

本論文は東急建設株式会社技術研究所，本田義博氏が研究生として解析したものである。また竹中工務店技術研究所，主席研究員斉藤勝彦氏には有益なる助言を辱うした。ここに感謝の意を表します。

（受理　昭和62年１月25日）

本論文は下記の報告を整理，加筆したものである。

小高昭夫他：可撓耐震筋違の可能性について：日本建築学会学術講演会梗概集，昭和46年11月

小高昭夫他：可撓耐震筋違の可能性について。(その２)：日本建築学会学術部講演梗概集，昭和47年10月

小高昭夫：可撓耐震筋違の可能性について。(その３)：日本建築学会関東支部学術研究発表会，昭和47年11月