不定流数値解析の種々の方式とその改良の方向に就て

内 藤 幸 雄*

On Various Methods of Numerical Analysis of Unsteady Flow a Way of Their Modification

Yukio NAITO

不定流現象は流量と水深を変量とする運動の方程式と連続の方程式を連立させると解けるはずである．しかし実際問題としては，単純なものはともかくとして，自然河川など一般の場合には数値解析法による近似解法で解く以外に方法がないのが現状である．しかしこの数値解析法にも種々の考え方があるので，本文ではこれらを紹介し，その長短を比較しながら，より良い方法を追求しようとしたものである．

1. まえがき

河川の下流，河口付近の水面形の挙動は複雑で，これまでも余り明らかでない．しかも最近は河口付近の高度利用が必要となり，このために，河口堰を築造するとか，河口付近の形状を変えるなどの計画を進めることが必要となっている．しかし河口でこのような人工的変革を行うには，それが，その周辺に及ぼす影響に就て予め知っておくのが都合がよい．具体的にはまず河口付近の水面形，水の流動状況，水質などの変化の様相を予め知っておく必要があるということである．

河川の河口付近の流況（不定流）の様相を知る方法としては，昭和40年代頃から，電算機を利用して数値解析法で解く方法が，種々提案されている．しかしいざ解いてみると中々うまく収束しない．この改良方法も色々考えられるが，一長一短があり，決定的な段階には至っていないようである．複雑をいとわず一番真面目にやればよいのであるが，それでは労力が大変である．実際問題としては目的別に要求される精度が違うので，それぞれに応じた複雑な方法，簡単な方法があってもよいはずであるし，また河川の状況が，河川別に違うので，同じ精度の結果を得るにもそれぞれに適した方法があるはずである。このようなわけで，これまで提案された幾つかの方法をお借りして，この方面の問題をさぐってみることにした．

2. 一 般 論

不定流の基本方程式を流量と水深を変量とする式で表わせば次のとおりである．

(1) 運動方程式

$$\frac{\eta}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}\cdot v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{v}{gA}\cdot g-i+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{n^2|v|v}{R^{4/3}}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{—}1)$$

または

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{1}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{n^2|v|v}{R^{4/3}}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{—}2)$$

(2) 連続の式

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial (A\cdot v)}{\partial x}=q \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{—}3)$$

または

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \qquad \cdots\cdots\cdots (2\text{—}4)$$

ここに，i：水路の底勾配，h：水路底に直角に測った水深，v：平均流速，R：径深，n：Manning の粗度係数，A：断面積，q：流路単位長当り横流入量，η，α：断面内の流速分布できまるエネルギーの補正係数（実際の計算では $\eta=1.0$，$\alpha=1.1$ として扱うこともあるが，$\eta=\alpha=1.0$ として扱う場合が多い），x：距離（下流向きを正とする），t：時間，g：重力の加速度とする。

流れの不定流現象は上記の運動方程式及び連続の式を連立させて解けば得られるはずであるが，特定の単純断面ならともかく，変断面の自然河川では，解析的に解くことはもちろん，数値的に解くことも必ずしも容易でない．そして数値解法に関する研究が進んだ現在においても，絶対的といえるものはなく，種々の近似解析法が実用上の価値をなお失わない状況であることは既に述べたとおりである．3 章以降は，考え得る種々の具体的方

＊土木工学科

法を紹介して，その長短を比較しながら，より良い方法を追求しようとするものである．

3. 疑似不定流計算方式

疑似不定流とは運動方程式及び連続の式を厳密に連立させるのではなく，双方の式を単独に用いて解くこととなる．現象的には，上流（もしくは下流）の現象が瞬間に下流（もしくは上流）に伝播されることになる．

1）一方向流れの場合

運動方程式；不定流の一般式のうち加速度勾配を無視したものである．すなわち

$$\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\alpha}{2g}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{n^2\ v^2}{R^{4/3}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (3-1)$$

連続の式；基本式中のｑは横流入量（単位長当り）でこの場合は，ｑ＝０とする．但し，横流入のある場合，例えば支川が流入する場合は点流入として単純に本川流量に加えることになる．すなわち

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (3-2)$$

2）感潮部の場合

この方法は基本方程式（2—1），（2—4）式を直接数値計算して解を求める方法であり，精度を高めるためには相当の計算労力を必要とするけれども，自然河川の複雑な境界条件について比較的忠実に，かつ基本式を省略なしに計算することができて便利である．また，最近は電子計算機が普及し，はん雑な計算を比較的安易にできるようになったため，この方法を計算機で行なうに便利なように改良され実施されている．

ここでは比較的単純な計算方法として基本方程式の微分量を定差におきかえて計算する方法を説明する．

いま，運動方程式（2—1）の∂を$\varDelta$に書きかえると

$$\varDelta H=-\frac{1}{2g}\varDelta v^2-\frac{1}{g}\frac{\varDelta v}{\varDelta t}\varDelta x-f|v|v\varDelta x \quad \cdots (3-3)$$

となる．また，連続の方程式（2—4）式は

$$\varDelta Q=q-B\varDelta x\frac{\varDelta H}{\varDelta t}=q-\varDelta F\frac{\varDelta H}{\varDelta t} \quad \cdots\cdots\cdots (3-4)$$

と書くことができる．ここにＢは河幅，$\varDelta F$ は $\varDelta x$ 区間の水面積であり $\varDelta F=B\cdot\varDelta x$，$q=\int_{x_2}^{x_1} q'\,dx$ である．

境界条件としては一般にいろいろの形で与えられるが，普通取り扱われるのは次のようなものが多い．

$$\left.\begin{array}{l}\text{河口（下流端）にて（}x=0\text{にて）}\\ \quad H=f(t),\quad \partial H/\partial t=\phi(t)\\ \text{感潮部上流端にて}\\ \quad Q=q_n(t)\end{array}\right\} \quad (3-5)$$

すなわち，河口において潮位曲線が与えられ，また上流において河川固有流量が与えられる場合である．

感潮区域を $\varDelta x_1$，$\varDelta x_2$，……，$\varDelta x_i$，……，$\varDelta x_n$ の n 個の小区間にわけ，また時間を $\varDelta t$ ごとの小時間にわけ座標軸を図4—1のように各要素添字をつけてその添字は図３—１に示す座標点における値を示すものとする．また，ここでは摩擦抵抗係数として，$f=n^2/R^{4/3}$ を用いることとすれば，$\varDelta x_i$ の区間においては（3—3）及び（3—4）式が次のようになる．

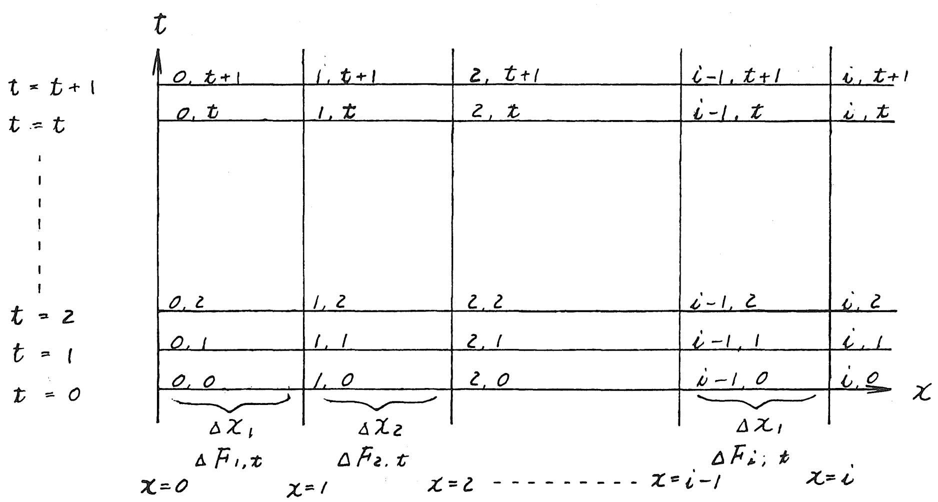

図 3 — 1

$$H_{i,t}=H_{i-1,t}+\varDelta H_{i,t}$$
$$=H_{i-1,t}-\frac{1}{2g}(\varDelta v^2)_{i,t}-\frac{1}{g}\left(\frac{\varDelta v}{\varDelta t}\right)_{i,t}\cdot\varDelta x_i-\left(\frac{n^2}{R^{4/3}}v|v|\right)_{i,t}\cdot\varDelta x_i \quad \cdots\cdots (3-6)$$

$$Q_{i,t}=Q_{i-1,t}+q_{i,t}-(\varDelta H/\varDelta t)_{i,t}\cdot\varDelta F_{i,t} \cdots (3-7)$$

ここに，$(\varDelta v^2)_{i,t}=v^2{}_{i,t}-v^2{}_{i-1,t}$ である．また，$(\varDelta v/\varDelta t)_{i,t}$，$\{(n^2/R^{4/3})\,v|v|\}_{i,t}$，$(\varDelta H/\varDelta t)_{i,t}$ は，ともに t=t における $\varDelta x_i$ 区間の値で，$\varDelta x_i$ 区間のHが求められると，横断面積Aがわかるから，v を知ることができる．そこで $\varDelta x_i$ 区間を代表するHの値を知ることが必要であるが，一般に $H_{i-1,t}$ と H_{it} の差が小さいので（もしこの差が大きいときは距離的計算区分 $\varDelta x$ を十分小さくする必要がある），近似的に $H_{i-1,t}$ をもって代表させることができる．この近似は目的が直接に $\varDelta H$ を求めるのではなく，v を求めることにあるので，ある程度の誤差は許容される．

① 河口における Q〜t 曲線

河口で Q〜t 曲線が与えられている時は，それをそのまま用いればよい．しかし，一般に河口では H〜t 曲線のみが与えられ，Q〜t 曲線は未知であることが多い．この場合にはまず河口の Q〜t 曲線を仮定する必要がある．この仮定が真に近いほど以後の計算が簡単化されるので，できるだけ妥当な曲線を仮定するのがよい．その一つの方法としては，まず実測か計算により感潮部上流端の流入量 q_n〜t 曲線を決定する． 一方感潮部では河口水位が常に水平に，かつただちに伝播するものとするか，あるいは河口水位と感潮部上流端水位とが常に一直線になるものとして，連続の方程式から河口流量を計算し，これに q_n〜t 曲線を，河口までの到達時間を考慮して加算したものを河口における所要の Q〜t 曲線と仮定する．

② 河口より上流に向う計算

i) $Q_{i,t}$，$v_{i,t}$ の計算

x=0 から x=1への計算の場合には（3—7）式は

$$Q_{1,t}=Q_{0,t}-(\varDelta H/\varDelta t)_{1,t}\cdot\varDelta F_{1,t}+q_{1,t}$$

となり，$\varDelta F_{1,t}$ は $\varDelta H_{0,t}$ を用いて求める．また，$(\varDelta H/\varDelta t)_{i,t}=(\varDelta H/\varDelta t)_{0,t}$ とすれば，$Q_{0,t}$，$q_{1,t}$ は与えられているから，上式から $Q_{1,t}$ が求められる．つぎに区間 $\varDelta x_1$ の水位が $H_{0,t}$ であるとして，$A_{1,t}$ を求めると，$v_{0,t}=Q_{0,t}/A_{0,t}$，$v_{1,t}=Q_{1,t}/A_{1,t}$ であるから x=0，x=1 における v の値を計算することができる．

ii) $H_{1,t}$ の計算

i) により $v_{0,t}$，$v_{1,t}$ がわかるから $(\varDelta v^2)_{1,t}=v^2{}_{1,t}-v^2{}_{0,t}$ より $(\varDelta v^2)_{1,t}$ がわかり，また，$v_{1,t}=(v_{0,t}+v_{1,t})/2$ とすれば同様に $(\varDelta v/\varDelta t)_{1,t}=(v_{1,t+1}-v_{1,t-1})/2\cdot\varDelta t$ とすることができる．次に $H_{0,t}$ に対応する $R_{0,t}$，$R_{1,t}$ を求め，$R_{1,t}=(R_{0,t}+R_{1,t})/2$ とすれば，

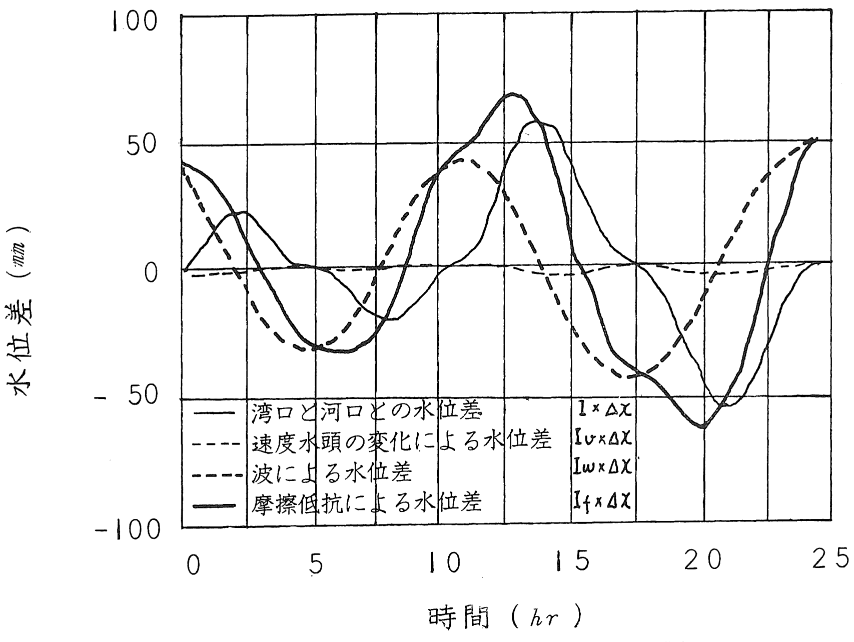

図3—2　平水時の児島湾内と旭川河口の水位差の分析

$\{(n^2/R^{4/3})v|v|\}_{1,t}=(n^2/R^{4/3}_{1,t})\cdot v_{1,t}|v_{1,t}|$ となる．従って $H_{1,t}$ は（3―6）式を適用して，次式により計算することができる．

$$H_{1,t}=H_{0,t}-\frac{1}{2g}(\varDelta v^2)_{1,t}-\frac{1}{g}\left(\frac{\varDelta v}{\varDelta t}\right)_{1,t}\cdot\varDelta x_1-\left(\frac{n^2}{R^{4/3}}\cdot v|v|\right)_{1,t}\cdot\varDelta x_1$$

区間 $x=2, 3, \cdots, n$ について i)，ii) の計算手続を繰り返し，各点の各時刻の水位と流量を感潮区域全体にわたって求める．

③　河口の $Q_{o\sim i}$ の再計算

以上のようにして感潮区域全体にわたって各点の H～t を知ることができたので（3―7）式を用いて各区間における流量を計算し，これを全区間にわたって集録すれば

$$Q_{0,t}=Q_{i,tn}+\sum_{i-1}^{n}(\varDelta Z/\varDelta t)_{i-1,t}\cdot\varDelta F_{i-1}-\sum_{i-1}^{n}q_{i,t} \quad\cdots\cdots(3\text{―}8)$$

となって河口の Q_0～t 曲線が求められる．

④　①と③との比較

①で仮定した Q～t と③で求めた Q～t とを比較し両者が異なっている場合は，③で求めた Q_0～t を新なに河口の Q～t と仮定して，②の計算手続を繰り返し，仮定された河口の Q～t と計算により求められた Q_0～t とが所要の精度で一致するまで，上記の計算を何回か繰り返すことにより，各点の各時刻における H，Q，v などが求められる．

図3―2に児島湾内で計算された結果を示す．図中 I_v，I_w，I_f は（3―3）式の右辺の各項による勾配を表わし，図より（3―3）式の各項の程度を知ることができる．

4.　不定流計算　A方式

不定流の基礎方程式のうち加速度並びに流速を省略した等流型の運動方程式と連続の式の組合せになるものである．すなわち

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial x}+\dfrac{n^2Q^2}{R^{4/3}A^2}=0 & \cdots\cdots(4\text{―}1)\\[2ex]\dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=q & \cdots\cdots(4\text{―}2)\end{cases}$$

これを差分型に変換すれば

（4―2）式より

$$_t\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_n=\frac{_{t+\triangle t}A_n-{_tA_n}}{\varDelta t} \quad\cdots\cdots(4\text{―}3)$$

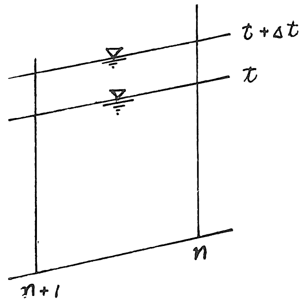

図　4　―　1

（4―3）式より

$$_{t+\triangle t}A_n={_tA_n}+{_t\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_n}\cdot\varDelta t \quad\cdots\cdots(4\text{―}4)$$

一方（4―2）式は q=0 として

$$_t\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)_n=-{_t\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_n}=-\frac{_tQ_{n+1}-{_tQ_n}}{\varDelta x}\cdots(4\text{―}5)$$

（4―5）を（4―4）に代入すると

$$_{t+\triangle t}A_n={_tA_n}-\frac{_tQ_{n+1}-{_tQ_n}}{\varDelta x}\cdot\varDelta t\cdots\cdots(4\text{―}6)$$

次に（4―1）の運動方程式は

$$Q^2=-\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{R^{4/3}A^2}{n^2}$$

$$_{t+\triangle t}Q_n=\sqrt{-\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{R^{4/3}A^2}{n^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{_{t+\triangle t}H_n-{_{t+\triangle t}H_{n-1}}}{\varDelta x}\cdot{_{t+\triangle t}\left(\frac{R^{4/3}A^2}{n^2}\right)_{n,n+1}}}\quad\cdots\cdots(4\text{―}7)$$

具体的な計算は初期条件 t 時のH及び A，Q を各断面に与える．これより（t + $\varDelta$ t）時の A が各断面に求まり，断面特性を仲介に水位に変換される．水位が求まれば（4―7）式より（t + $\varDelta$t）時の Q が求まる．

一般に，（4―6），（4―7）を連立させ上図より解が求まるまでの経過は（n－1）と（n－2）の t 時の A と Q より（n － 2）の（t + $\varDelta$t）時の A が求まる．この様に順に追跡すると（t + $\varDelta$t）時の n 断面までの A が求まる．すなわち断面特性を介在させてHが求まる．しかし（n + 1）断面は流量勾配の片側差分（前方差分）のため求まらない．ところが，この場合は（n+1）断面には H－t の境界条件があるので，これより（t + $\varDelta$t）時の A，H が求まることになる．

次に（4―7）式より（t+ $\varDelta$t）時の H より（t + $\varDelta$t）時の Qを求める．

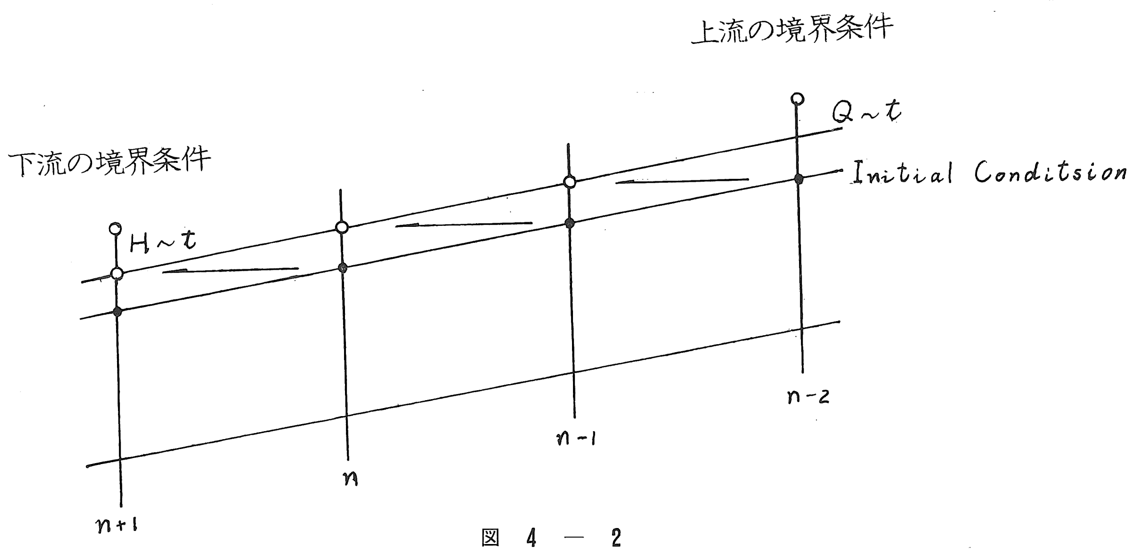

図 4 — 2

まず (n+1) と n の水面勾配より (n+1) に Q が求まり，n と (n−1) から n に Q が求まる．こうすると，(n − 2) 断面ではこの差分方程式では得られないが (n−2) に対しては上流の境界条件 Q—t があり，結局 Q が求まることになる．

5. 不定流計算 B方式

不定流の一般式を直接差分に変形し，各 $\varDelta t$ 間の勾配補正で繰り返し行なうといった方法である．原式より求めようとするものは流速 (v) と水位 (H) と考え，流量は H が得られれば断面特性を介在し A を求め，

$Q=A\cdot v$ より得られる．

すなわち原式のうちの運動方程式を再記すると

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}=0 \qquad \cdots\cdots(5\text{—}1)$$

$1/g\cdot\partial v/\partial t$ について (5—1) 式を右辺，左辺に整理する．

$$\partial v=-g\cdot\partial t\left\{\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}\right\} \cdots\cdots(5\text{—}2)$$

∂v は ∂t 方向の ∂v であるから，t の方向の前方差分に変形すると $\varDelta v={}_{\star}v_i-{}_{j}v_i$ となる．したがって

$${}_{\star}v_i={}_{j}v_i-\left\{\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}\right\}\cdot g\cdot\partial t \qquad \cdots\cdots(5\text{—}3)$$

$-\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{n^2v^2}{R^{4/3}}\right)={}_{j}F_i$ に置換えると

$${}_{\star}v_i={}_{j}v_i+{}_{j}F_i\cdot g\cdot\varDelta t \qquad \cdots\cdots(5\text{—}4)$$

ここで ${}_{\star}v_i$ の意味であるが，j 時より出発して $\varDelta t$ 時後の v，H (${}_{j+\triangle t}v_i$，${}_{j+\triangle t}H_i$) を求めることが目的だが j 時の流量勾配，水面勾配によって $\varDelta t$ 後の求めようとする勾配に近似するのは精度と収束を考えた時に問題となる．そこで $(j+\varDelta t)$ 時前に☆時なる cushion を置こうとした考えである．従って☆の定義として $\varDelta t$ の何分の1という様に表現する必要がある．

一般には $\gamma\cdot\varDelta t$ と書ける．したがって γ は½でも⅓でもよいということになる．

したがって (5—4) 式は

$${}_{\star}v_i=v_i+F_i\cdot g\cdot\gamma\cdot\varDelta t \qquad \cdots\cdots(5\text{—}5)$$

次に原式のうち連続の式を再記すると

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \qquad \cdots\cdots(5\text{—}6)$$

$$\frac{\partial BH}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q$$

$$\frac{B\partial H}{\partial t}+\frac{H\partial B}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q$$

両辺に 1/B を乗ずると

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{H\partial B}{\partial t\cdot B}+\frac{\partial Q}{\partial x\cdot B}=q\cdot\frac{1}{B}$$

上式第2項の内の $\partial B/B\fallingdotseq 0$ と考えてよい．

したがって

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial Q}{B\cdot\partial x}=\frac{q}{B} \qquad \cdots\cdots(5\text{—}7)$$

上式第1項の ∂H は ∂t 方向の ∂H であるから

$\varDelta H={}_{\star}H_i-{}_{j}H_i$

したがって

$${}_{\star}H_i={}_{j}H_i+\left\{\frac{-\partial Q}{B\cdot\partial x}+\frac{q}{B}\right\}\cdot\varDelta t$$

$$\left\{\frac{-\partial Q}{B\cdot\partial x}+\frac{q}{B}\right\}={}_jG_i$$ と置くと

$${}_{☆}H_i={}_jH_i+{}_jG_i\cdot\varDelta t \qquad \cdots\cdots (5\text{—}8)$$

☆の定義にしたがって

$${}_{☆}H_i={}_jH_i+{}_jG_i\cdot\gamma\cdot\varDelta t \qquad \cdots\cdots (5\text{—}9)$$

さて ${}_jF_i$ 及び ${}_jG_i$ について整理すると次のようになる．なおx方向は流れ方向である．

まず

$${}_jG_i=-\frac{\partial Q}{B\cdot\partial x}+\frac{q}{B}$$

$$=\frac{1}{B_i}\left({}_jq_{i-1}-\frac{{}_jQ_{i+1}-{}_jQ_i}{\varDelta x}\right) \qquad \cdots\cdots (5\text{—}10)$$

次に

$${}_jF_i=-\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{n^2|v|v}{R^{4/3}}\right)$$

$$=-\left\{\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{{}_jv^2{}_{i+1}-{}_jv^2{}_i}{\varDelta x_{i+1}}+\frac{{}_jH_{i+1}-{}_jH_i}{\varDelta x_{j+1}}+\frac{n^2}{2}\cdot\left(\frac{{}_jv_{i+1}|{}_jv_{i+1}|}{{}_jR_{i+1}^{4/3}}+\frac{{}_jv_i|{}_jv_i|}{{}_jR_i^{4/3}}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots (5\text{—}11)$$

したがってj時を今 Initial Condition として考えられるとすれば，また $\gamma=½$ と考えれば，☆ ＝ j ＋ ½$\varDelta$t 時のv，Hは（5—5），（5—9），（5—10），（5—11）式より求めることができる．

次に☆☆時を求める．$\gamma=½$ としているので，☆☆＝j+½$\varDelta$t＋½$\varDelta$t=j+$\varDelta$t すなわち，この求めようとしている時刻に対して

$${}_{☆☆}v_i={}_jv_i+{}_{☆}F_i\cdot g\cdot ½\varDelta t$$

$${}_{☆☆}H_i={}_jH_i+{}_{☆}G_i\cdot ½\varDelta t$$

${}_{☆}F_i$ および ${}_{☆}G_i$ は（5—10），（5—11）式のjと☆を入れ変えたものである．

6.　不定流計算　C方式

不定流の一般式を再記すると

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \qquad \cdots\cdots (6\text{—}1)$$

$$\frac{\eta}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\alpha}{g}\cdot v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{n^2|v|v}{R^{4/3}}=0 \qquad \cdots\cdots (6\text{—}2)$$

まず連続の式について

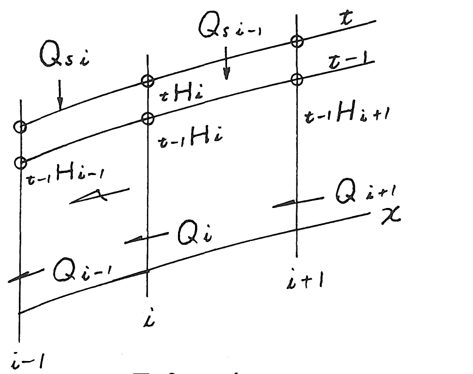

図 6 — 1

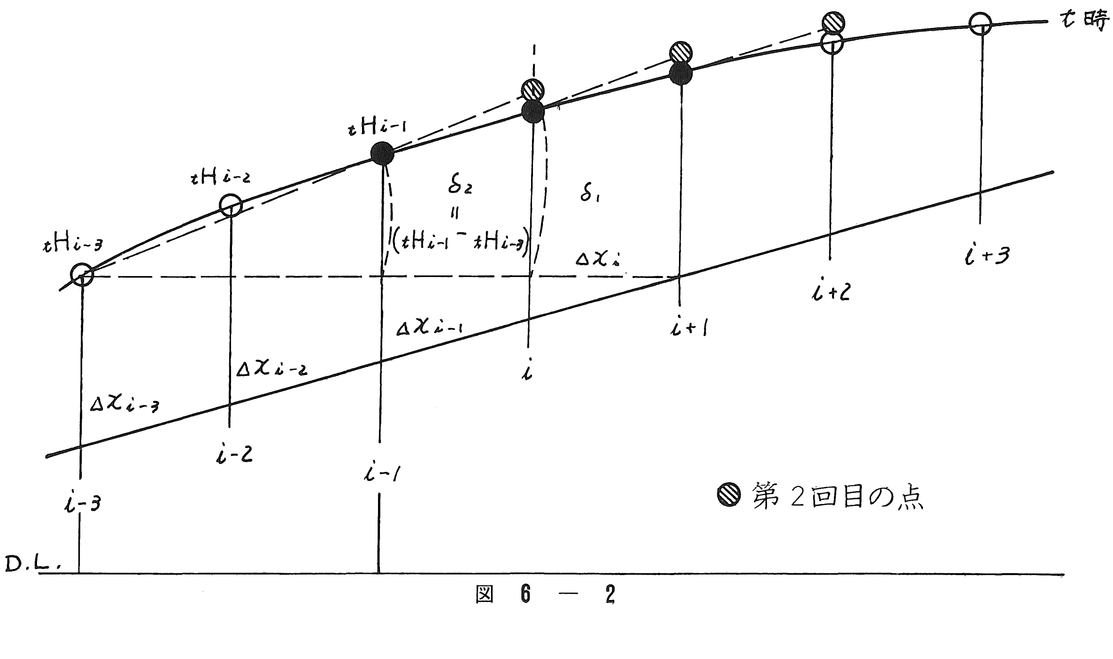

図 6 — 2

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial BH}{\partial t}=B\frac{\partial H}{\partial t}+H\frac{\partial B}{\partial t}$$

$\partial B/\partial t \ll 0$ とすれば

$$=B\frac{\partial H}{\partial t}$$

したがって

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-q\right)=0$$

ところで，q は単位幅当りの横流入量であるが，この単位幅としては当然のことながら流水方向ということになる（すなわち x 方向）．したがって，$Q_s/\varDelta x=q$ となる（Q_s は横流入量）．

$$\frac{\partial H}{\varDelta t}+\frac{1}{B}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q_s}{\varDelta x}\right)=0 \qquad \cdots\cdots (6\text{—}3)$$

（6—3）式を差分になおすと

$$\frac{{}_tH_i-{}_{t-1}H_i}{\varDelta t}+\frac{({}_{t-1}Q_{i-1}-{}_{t-1}Q_{i+1})-({}_tQ_{s\,i-1}+{}_tQ_{s\,i})}{{}_{t-1}B_i\cdot\varDelta x_i+{}_{t-1}B_{i-1}\cdot\varDelta x_{i-1}}=0$$

$$tH_i={}_{t-1}H_i-\varDelta t\left\{\frac{({}_{t-1}Q_{i-1}-{}_{t-1}Q_{i+1})-({}_tQ_{s\,i-1}+{}_tQ_{s\,i})}{{}_{t-1}B_i\cdot\varDelta x_i+{}_{t-1}B_{i-1}\cdot\varDelta x_{i-1}}\right\} \qquad \cdots\cdots (6\text{—}4)$$

最終 ${}_tH_i$ は次の手順をとる．

○第1回目（6—4）式によって ${}_tH_i$ を求める．

○第2回目　第１回目の値より２点外挿

$$\delta_1:\delta_2=(\varDelta x_{i-1}+\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-3}):(\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-3})$$

$$\delta_1=\frac{\varDelta x_{i-1}+\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-3}}{\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-3}}\cdot\delta_2$$

$$\delta_2={}_tH_{i-1}-{}_tH_{i-3}$$

$$\therefore\ {}_tH_i={}_tH_{i-3}+\delta_1={}_tH_{i-3}$$

└第２回目点

$$+\frac{\varDelta x_{i-1}+\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-3}}{\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-3}}$$

$$({}_tH_{i-1}-{}_tH_{i-3})$$

○第３回目は第２回目の値より２点外挿

$$\therefore\ {}_tH_i={}_tH_{i-1}+\frac{\varDelta x_{i-1}}{\varDelta x_{i-1}+\varDelta x_i}({}_tH_{i+1}-{}_tH_{i-1})$$

（6—2）式から

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{{}_tv_i-{}_{t-1}v_i}{\varDelta t}+\frac{\alpha}{g}\cdot{}_tv_i\cdot\frac{{}_{t-1}v_{i-2}-{}_{t-1}v_i}{\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-1}}+\frac{{}_tH_{i-1}-{}_tH_{i+1}}{\varDelta x_{i-1}+\varDelta x_i}+\frac{n^2|{}_{t-1}v_i|{}_tv_i}{{}_tR_i^{4/3}}=0$$

$${}_tv_i={}_{t-1}v_i-g\cdot\varDelta t\left(\frac{\alpha}{g}\cdot{}_tv_i\cdot\frac{{}_{t-1}v_{i-2}-{}_{t-1}v_i}{\varDelta x_{i-2}+\varDelta x_{i-1}}+\frac{{}_tH_{i-1}-{}_tH_{i+1}}{\varDelta x_{i-1}+\varDelta x_i}+\frac{n^2|{}_{t-1}v_i|{}_tv_i}{{}_tR_i^{4/3}}\right)$$

7. 不定流計算　D方式

不定流の基本方程式

$$\frac{\eta}{g}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\alpha}{2g}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{n^2|v|v}{R^{4/3}}=0 \qquad \cdots\cdots (7\text{—}1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \qquad \cdots\cdots (7\text{—}2)$$

この方法は，感潮河川に適用されるものである．

（7—1）式より

$$\frac{1}{\varDelta x}({}_tH_{j-1}-{}_tH_j)+\frac{1}{2g}\cdot\frac{{}_tv_{j-1}^2-{}_tv_j^2}{\varDelta x}+\frac{1}{g}\cdot\frac{{}_tv_j-{}_{t-1}v_i}{\varDelta t}+\frac{n^2}{R^{4/3}}\cdot{}_tv_j^2=0$$

（7—2）式より横流入 q=0，h を水深とすれば

$$\frac{{}_{t+1}h_j-{}_th_j}{\varDelta t}+\frac{{}_tR_{j+1}\cdot{}_tv_{j+1}-{}_tR_j\cdot{}_tv_j}{\varDelta x}=0$$

$$a=\frac{1}{2g}+\frac{v^2\cdot\varDelta x}{R^{4/3}}$$

$$b=\frac{\varDelta x}{2g\cdot\varDelta t}$$

$$c=\frac{1}{2g}\cdot{}_tv_{j-1}^2+\left({}_th_{j-1}-{}_th_j\right)-\frac{\varDelta x}{g\cdot\varDelta t}\cdot{}_{t-1}v_j$$

とおけば

$$a\cdot{}_tv_j^2-2\cdot b\cdot{}_tv_j-c=0$$

$${}_tv_j=\frac{b-\sqrt{b^2+ac}}{a}$$

$${}_tR_j=\frac{{}_th_{j-1}+{}_th_j}{2}-H_j$$

$${}_tQ_j={}_tv_j\cdot B_{uj}\cdot R_j$$ （B_u：運動方程式の川幅）

$${}_{t+1}h_j=\frac{({}_tQ_{j+1}-{}_tQ_j)\cdot\varDelta t}{\varDelta x\cdot B_{Rj}}$$ （B_R：連続式の川幅）

8. 不定流計算　E方式

今，基準面（今の場合 D.L.）からの水位を H，断面流量をQ，平均流速を v，貯水池の断面積を A，その幅を B，径深を R，粗度係数を n として x 軸を上流に向

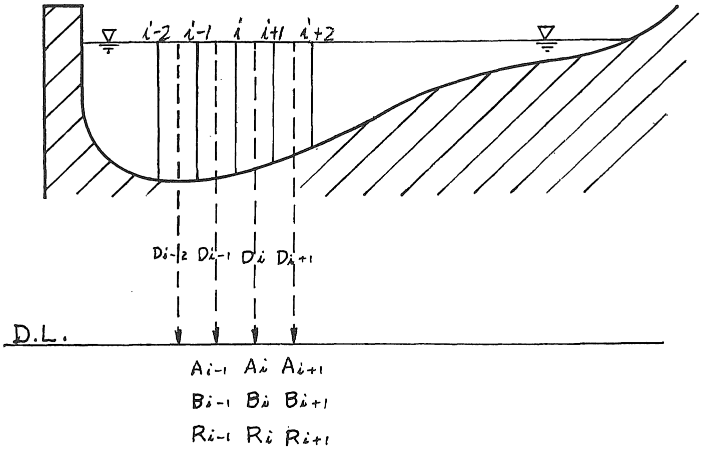

図８－１　　貯水池縦断面の格子のとりかた

ってとれば，（図8—1）運動方程式と連続方程式は

$$\eta\frac{\partial v}{\partial t}+v\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{gn^2|v|}{R^{4/3}}\right)=-g\frac{\partial H}{\partial x}\quad\cdots\cdots(8\text{—}1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\cdots\cdots(8\text{—}2)$$

となる．

これより（8—1）および（8—2）式を差分方程式に変換する．このとき格子の設定と諸量の配置は，図8—1の如くとする．

格子間隔 Δx，時間間隔を Δt とすると，式（8—1）は左辺の括弧の中をＫとおき

$$\frac{\eta}{\Delta t}(v_{i,t+\Delta t}-v_{i,t})+\frac{v_{i,t+\Delta t}+v_{i,t}}{2}K_i=-\frac{g}{\Delta x}\left(H_{i,\,t+\frac{\Delta t}{2}}-H_{i-1,\,t+\frac{\Delta t}{2}}\right)$$

と置ける．整理すると

$$v_{i,t+\Delta t}=\left(\frac{2}{E_i}-1\right)\cdot v_{i,t}-\frac{g\Delta t}{\eta\Delta xE_i}\cdot\left(H_{i,\,t+\frac{\Delta t}{2}}-H_{i-1,\,t+\frac{\Delta t}{2}}\right)\cdots(8\text{—}3)$$

ただし

$$E_i=1+\frac{\Delta t\cdot K_i}{2n}=1+\frac{\alpha\cdot\Delta t}{4n\Delta x}(v_{i+1}-v_{i-1})+\frac{gn^2\Delta t}{2n}\cdot\frac{|v_i|}{\left(\frac{R_i+R_{i-1}}{2}\right)^{4/3}}$$

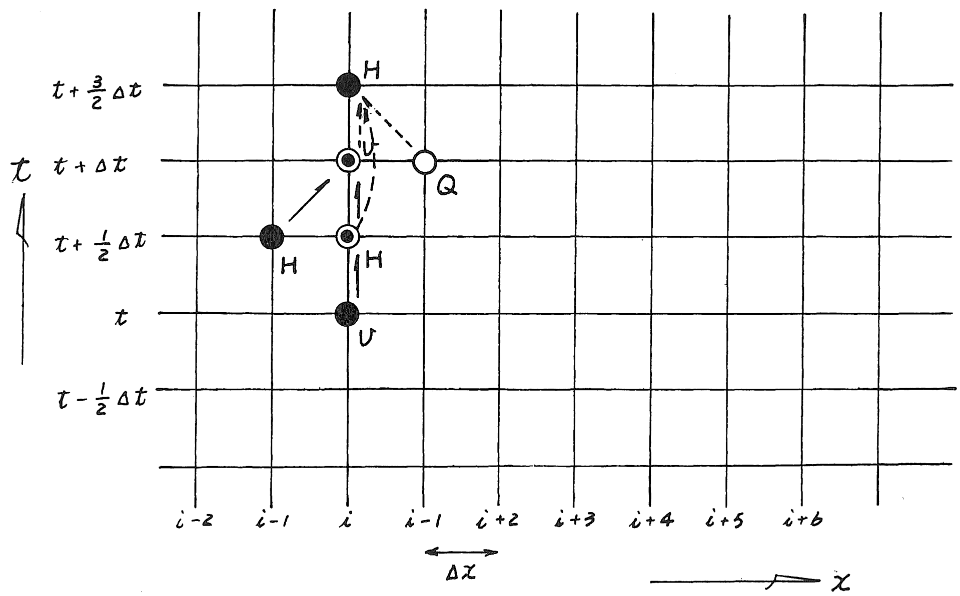

図８－２　津 浪 追 跡 説 明 図

(8—2) 式は

$$H_{i,t+\frac{3}{2}\triangle t}=H_{i,t+\frac{\triangle t}{2}}-\frac{\Delta t}{\Delta x\cdot B_{i,t+\frac{\triangle t}{2}}}\cdot$$

$$(Q_{i+1,t+\triangle t}-Q_{i,t+\triangle t})\cdots\cdots(8—4)$$

に変換される．なお，$Q_{i,t+\triangle t}$ を求めるに際しては

$$Q_{i,t+\triangle t}=\frac{1}{2}\left(A_{i,t+\frac{\triangle t}{2}}+A_{i-1,t+\frac{\triangle t}{2}}\right)v_{i,t+\triangle t}\cdots\cdots(8—5)$$

に近似するとする．

次に (8—3)，(8—4)，(8—5) 式を前進型で数値積分して，解を求める．

計算は，図8—2に示す手順で step by step に次の手順に従って実行する．

(1) (8—3) 式でわかるように，$v_{i,t+\triangle t}$ を求めるには，$v_{i,t}$，$H_{i,t+\frac{\triangle t}{2}}$，$H_{i-1,t+\frac{\triangle t}{2}}$の値が必要である．

(2) 同様に，$H_{i,t+\frac{3}{2}\triangle t}$は，$H_{i,t+\frac{\triangle t}{2}}$，$v_{i,t+\triangle t}$，$v_{i+1,t+\triangle t}$ の値で決まる．〔式 (8—4) より〕

(3) よって，初期条件を与えれば，(1)，(2)を交互に繰り返すことによって各地点の流れや水位が求まる．この時，計算開始時間を指定すれば，各地点の流れや水位の時間的経過がわかることになる．

9. 考　察

不定流計算の解法としては，既に述べたように，いくつかの方法を挙げることができるが，解法の特徴としては，差分型の採り方と収束方法の工夫にあるように考えられる．

(1) 各方法に対する考察

① 凝似不定流方式

河川の断面や河床勾配の変化が比較的少ない，即ち速度項と加速度項の影響が少ない場合は，不定流現象を摩擦と貯留の2つで殆んど表現できるので，この方法を使用してさしつかえない．

② A方式

この方式の特徴は，運動方程式を簡易化したところにある．差分方式は片側差分を採っている．河川の断面が簡単な場合は，この方法でも実用的である．

③ B方式

この方法の特徴は，フィードバックによる収束法にある．或る時刻についてのv，Hを計算するので，途中でフィードバックを繰り返すことができ，計算労力の節約をはかることができる．差分方式は片側となっているが，サフィックスの採り方には今後の工夫が必要である．例えば本文中 (5—10) 式の $_jQ_{i+1}-{}_jQ_i$ は $_jQ_i-{}_jQ_{i-1}$ に，また (5—11) 式の $_jv^2{}_{i+1}-{}_jv^2{}_i$ は $_jv^2{}_i-{}_jv^2{}_{i-1}$ に変えた方が収束状況が良い．

④ C方式

この方式の特徴は，外挿，内挿方式であるが，問題は計算の第1回目及び第2回目に断面外挿を行う必要があり，これが，無いところの断面までつくってしまうことになる．その結果，内容がラフになり，断面が単純なところでは良いが，そうでないところでは収束しない場合がある．この欠点を補うため差分の採り方の再検討が望まれる．

⑤ D 方式

利根川河口付近などのような感潮河川の不定流の数値解析用として適用性があるようである．

⑥ E 方式

この方式は中央差分型が採られていて，河の水が海に流れてきて，どう拡散するか，海の潮流に対しどのように挙動ずるか，などの推定に使用できる．そのため河口付近の汚濁拡散や塩分の濃度分布などの推定にも役立つ．ただ式中の置換が複雑になっているが，この置換の特徴が何であるかよく判らない．

(2) 今後の改善に待つところ

① 差分型の採り方の研究

片側差分は収束性はあるが精度が落ちる．両側差分は精度は良いが計算が面倒であるばかりでなく収束しにくい．それで高い精度を必要とする場合でも，最初は片側差分でやり，これを参考に両側差分をするのが良いと思う．

また水面勾配 ($\Delta H/\Delta x$) と流量勾配 ($\Delta Q/\Delta x$) のそれぞれで採る差分型の組合せによって解く方法はうまくいった場合は，計算量が少なくて済むが，水位と流量がうまく咬合わない場合は収束しない欠点がある．それと同様に Δt と Δx の関係でも両者のバランスが悪いと精度が悪くなる．それはその河川の水理的自然現象に必要な Δt と Δx の関係があるはずだからである．なお大きい湾内のように水面積が非常に大きく，1㎜の水位差でも，その水の容量が大きい場合，即ち ΔH と ΔQ のつり合いが異状な場合は片側差分しかやれない場合がある．（湖の場合，河口付近など河川の水面幅が非常に広くなった場合も同様である）

② 収束性についての研究

流速と水位との関係を或る時刻の水位だけでやって check できる所謂B方式のt方向の Feed Back 方式が良いのか，C方式のx方向の外挿，内挿方式（既知資料

から次の既知資料まで計算しなければ計算結果の良否がわからない）がよいのか，あるいは別の方式が良いのかは，数学的な観点に立って再検討する必要があると思う．いずれにしても $\varDelta t$ 後の解を Feed Back も外挿，内挿もしない単発式は，計算精度，解の収束性を考えるとよい方法とは思えない．

〈参考〉単発式では$\varDelta t$と $\varDelta x$ の関係がうまくいっていないと収束しない．それで収束条件として $\varDelta t$ と $\varDelta x$ の関係が，いくつか研究されている．それは，例えば下記の如くである．

i) $$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \geqq \left\{ \{ (gA/B)^{1/2} + |v| \right\}$$

ii) $$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \geqq \left\{ (gA/B)^{1/2} + |v| \right\} (1+\frac{1}{2}b^*)^{-1/2}$$

但し

$$b^* = \frac{2g\varDelta t|v_i{}^{n-1}|}{(K^2/A^2)_i^n} + \frac{\varDelta t}{2\varDelta x}(v_{1\,i+2}^{n-} - v_{i-2}^{n-1})\;;\; b^* > 0$$

〔 i は x 方向，n は t 方向，K は断面の通水能，即ち $K^2 = C^2A^2R \cdots$ Chézy，$K^2 = A^2R^{4/3}/n^2 \cdots$ Manning〕

参考文献

本間 仁：水理学，丸善，昭和45年版
土木学会：水理公式集，土木学会，昭和46年版
Richtmyer, R. D.: Difference methods for initial-value problems, Interscience publishers, New York, 1962
Stoker, J. J.: Water waves, Interscience publishers, New York, 1965
岸 力：水理学演習（Ⅱ），学献社，昭和43年