

Sur la Cavité en Forme elliptique dans un Diélectrique  
avec un Champ Electrique uniforme

Ken-ichi HAYASHI

一様な電界の加わった誘電体内の長円状空洞について

林 憲 一

Résumé : Lorsque une cavité en forme ellipsoïdale est présentée en diélectrique avec un champ électrique externe uniformément, l'intensité électrique dans la cavité est obtenue et aussi calculé en cas où l'axe n'est pas parallèle du champ externe. La densité de charge induite en surface est obtenue, encore.

1. Formule générale sur un champ électrique dans une cavité.

Nous pouvons écrire les formules sur l'intensité du champ électrique dans la cavité elliptique (le permittivité est  $\epsilon_0$ ) au champ externe uniformément  $E_0$  en diélectrique (la caractéristique est indiquée par  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ).<sup>1)</sup>

$$E_x = -\frac{E_{0x}}{1 + \frac{1-\epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{abcA_1}{2}} = L_1 E_{0x}, \quad A_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(s+b^2)(s+c^2)}} \quad (1)$$

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{1 + \frac{1-\epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{abcA_2}{2}} = L_2 E_{0y}, \quad A_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(s+a^2)(s+c^2)}} \quad (2)$$

$$E_z = -\frac{E_{0z}}{1 + \frac{1-\epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{abcA_3}{2}} = L_3 E_{0z}, \quad A_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)}} \quad (3)$$

Où, l'ellipsoïde est écrit comme suivant :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Egalement, le champ externe  $E_0$  est aussi,

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x} \mathbf{i} + E_{0y} \mathbf{j} + E_{0z} \mathbf{k}$$

2. Formule à calculer.

Pour simplifier la situation à considérer, nous avançons à obtenir l'expression en cas de l'ellipsoïde tournant.

(a) Lorsque  $a > b = c$ ,

$$A_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)^{\frac{3}{2}} (s+c^2)} = -\frac{1}{a^3 e^3} \left[ 2e - \ln \frac{1+e}{1-e} \right] \quad (4)$$

Où,  $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$

$$A_2 = A_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)^2 (s+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2a^3 e^3} \left[ 2 \frac{a^2}{c^2} e - \ln \frac{1+e}{1-e} \right] \quad (5)$$

Remarque :

$$\frac{abc}{2} (A_1 + A_2 + A_3) = \frac{ac^2}{2} (A_1 + 2A_3) = 1$$

(b) Lorsque  $a < b = c$ ,

$$A_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)^{\frac{3}{2}} (s+c^2)} = \frac{2}{(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} - \ln^{-1} \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} \right] \quad (6)$$

$$A_2 = A_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)^2 (s+a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(c^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ \ln^{-1} \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a} - \frac{a\sqrt{c^2-a^2}}{a} \right] \quad (7)$$

Remarque :

$$\frac{abc}{2} (A_1 + A_2 + A_3) = \frac{ac^2}{2} (A_1 + 2A_3) = 1$$

Considération.

[A] Dans ce cas :  $a > b = c = 1$  (normalisé pour se simplifier)

$$(i) \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{aA_1}{2} \right] = 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ \frac{aA_3}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

(ii) Posez  $a = 1 + \epsilon$ , où  $1 \gg \epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{aA_1}{2} \right] = \frac{1}{3}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{aA_3}{2} \right] = \frac{1}{3}$$

[B] Dans ce cas :  $0 < a < 1$

$$(i) \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{aA_1}{2} \right] = 1, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{aA_3}{2} \right] = 0$$

$$(ii) \lim_{a \rightarrow 1} \left[ \frac{aA_1}{2} \right] = \frac{1}{3}, \quad \lim_{a \rightarrow 1} \left[ \frac{aA_3}{2} \right] = \frac{1}{3}$$

Les courbes des expressions  $\frac{aA_1}{2}$  et  $\frac{aA_3}{2}$

(pourvu que  $b = c = 1$ ) sont présentées dans Fig. 1, ainsi que celles des formules  $L_1$  et  $L_3$  sont données dans Fig. 2 avec le paramètre  $\epsilon_r$ . Les valeurs numériques de Fig. 1 sont données par Table 1.

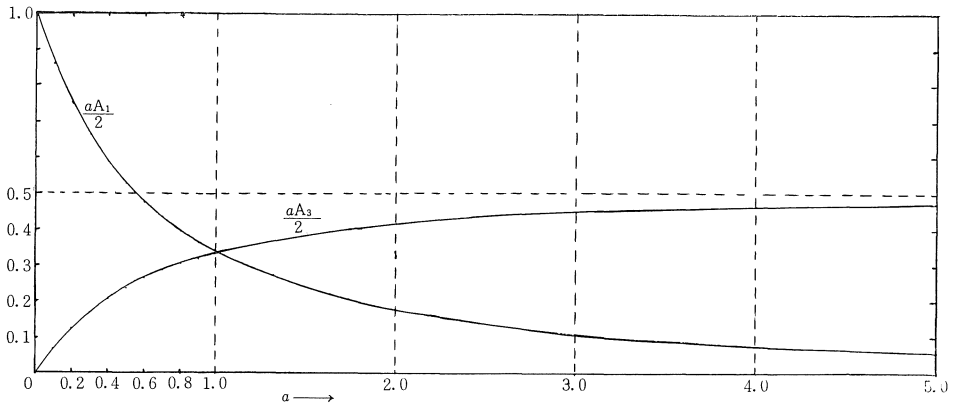


Fig 1.

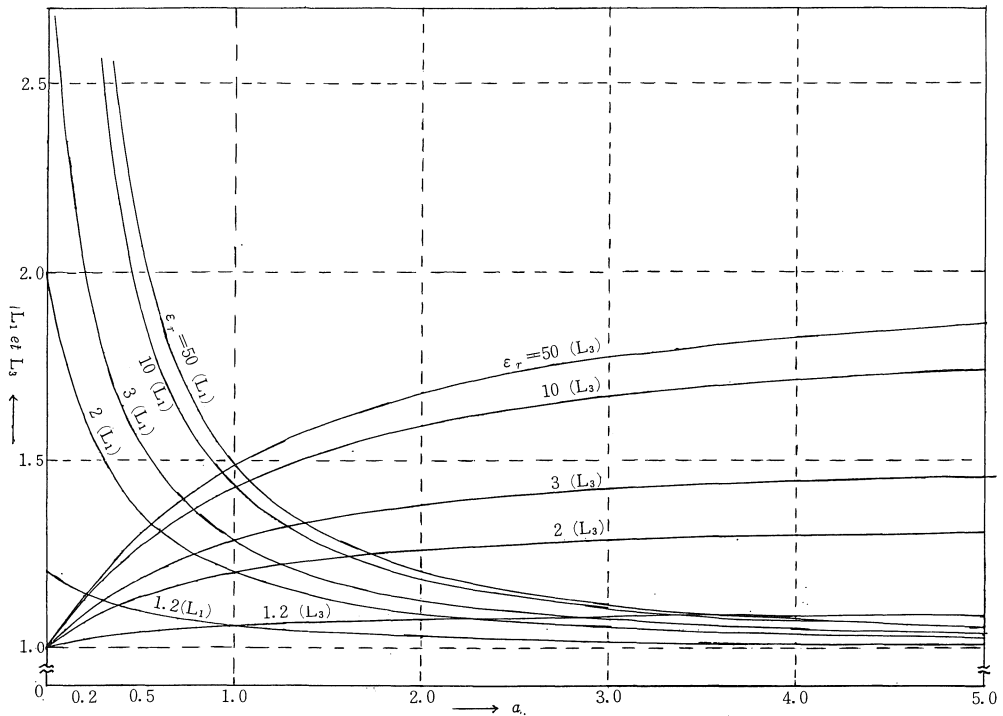


Fig 2

3. En cas de la cavité elliptique ayant un axe incliné pour le champ externe.

En cas que la cavité étant inclinée pour le champ externe uniformément  $E_0$  (en condition que le plan x-y situé parallèlement à  $E_0$ ), le champ dans la cavité est donnée par la formule suivante.

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \cos \theta \\ E_0 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

A savoir,

$$\frac{E_x}{E_0} = L_1 \cos \theta, \quad \frac{E_y}{E_0} = L_2 \sin \theta \quad (9)$$

Par conséquent, le champ interne dans la cavité est écrit par la suivante.

Grandeur :

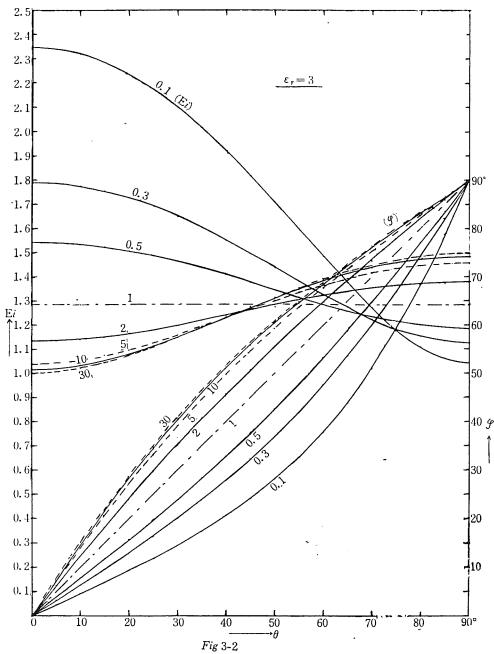
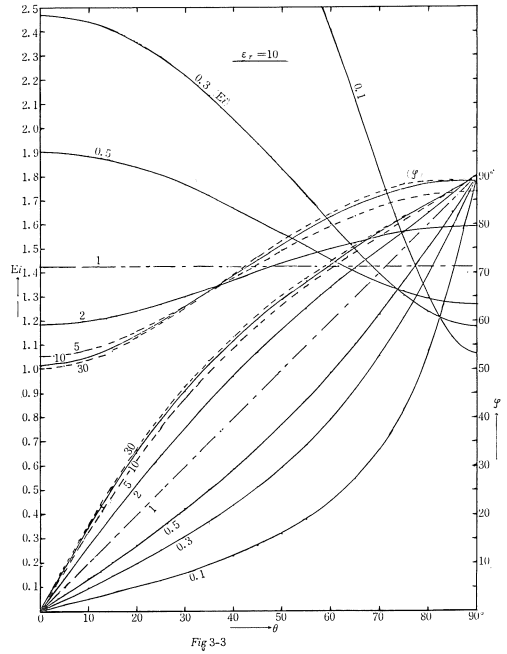
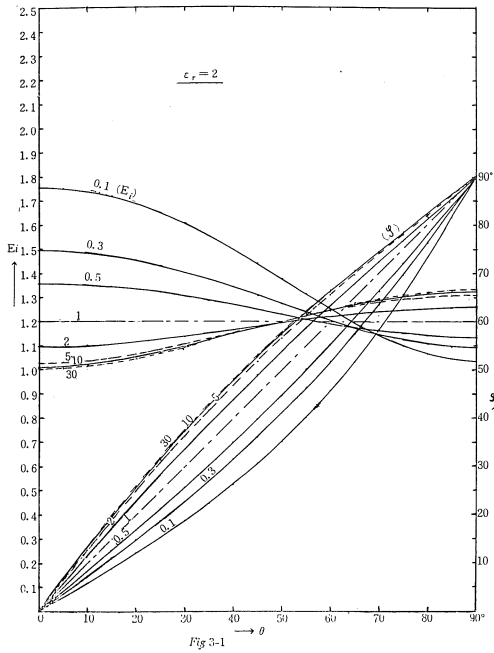
$$E_i = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(L_1 \cos \theta)^2 + (L_2 \sin \theta)^2} E_0$$

$$\frac{E_i}{E_0} = \sqrt{\left( \frac{\cos \theta}{1 + \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{aA_1}{2}} \right)^2 + \left( \frac{\sin \theta}{1 + \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{aA_3}{2}} \right)^2} \quad (10)$$

Angle :

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{E_y}{E_x} = \tan^{-1} \left( \frac{L_2 \sin \theta}{L_1 \cos \theta} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1 + \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{aA_3}{2}}{1 + \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \frac{aA_1}{2}} \tan \theta \right) \quad (11)$$

Les courbes sont indiquées dans Fig. 3 avec des paramètres = 2, 3 et 10.



4. La densité de la charge induite à la surface de la cavité.

Ayant pour but de comprendre la situation du champ interne, nous comptons la densité de la charge induite à la surface de la cavité.

(a) En cas que l'axe est parallèle au champ externe.

L'angle ( $\gamma$ ) entre la normale du plan tangentiel au point  $(x_1, y_1)$  sur la surface de la cavité en forme ellipsoïde est donné par l'expression suivante (Voir Fig. 4).

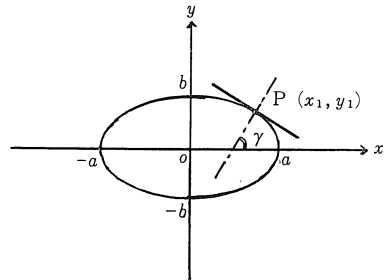


Fig 4

$$\text{Où, } \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^4 y_1^2}{b^4 x_1^2}}} \quad (12)$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

Ainsi que par la formule (13), nous obtenons l'expression (14)

$$\cos \gamma (y_1) = \sqrt{\frac{1 - y_1^2}{1 + y_1^2 (a^2 - 1)}} \quad (14)$$

Appliquant les conditions aux limites (Continus sont le composant tangentiel de l'intensité électrique ainsi que celui normal de la densité du flux électrique.), nous écriverons le suivant pour la densité de la charge induite  $\sigma_s$ .

$$\sigma_s = \epsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) E_x \cos \gamma = \epsilon_0 E_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} L_1 E_{0x} \cos \gamma (y_1) \quad (15)$$

Où, 
$$L_1 = \frac{1}{1 + \frac{1 - \epsilon_r a A_1}{\epsilon_r 2}}$$

Donc,

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} L_1 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{1}{1 + \frac{1 - \epsilon_r a A_1}{\epsilon_r 2}} = \frac{1}{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} - \frac{a A_1}{2}}$$

Par conséquent, la densité normalisée de la charge  $\sigma$  est donnée par

$$\sigma = \left(\frac{\sigma_s}{\epsilon_0 E_0}\right) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} - \frac{a A_1}{2}}\right) \cdot \cos \gamma (y_1) \quad (16)$$

Fig. 5 indique les courbes  $\left(\frac{1}{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} - \frac{a A_1}{2}}\right)$  et Fig. 6

fait celles de  $\cos \gamma (y_1)$ .

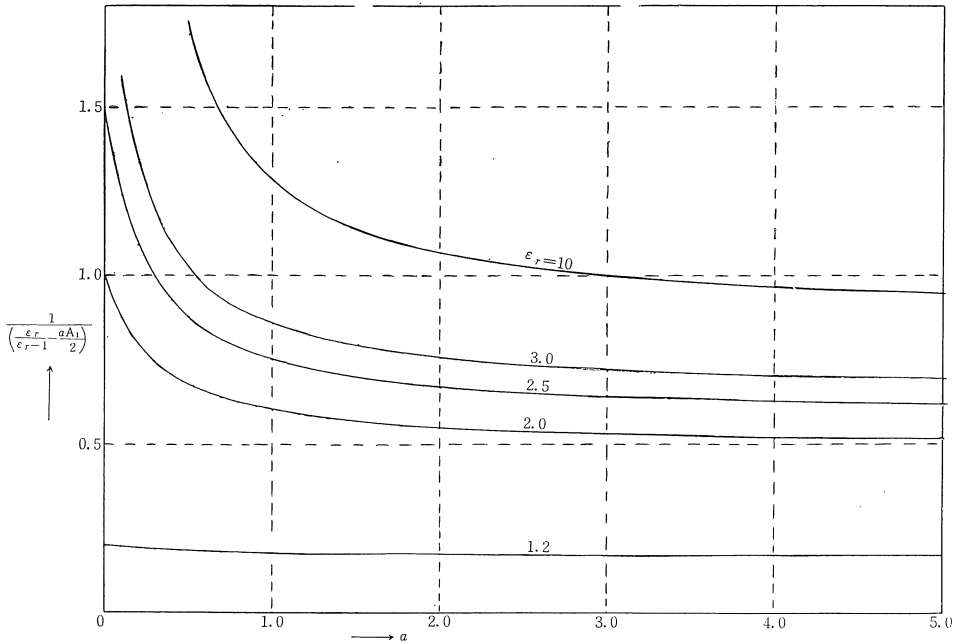


Fig 5

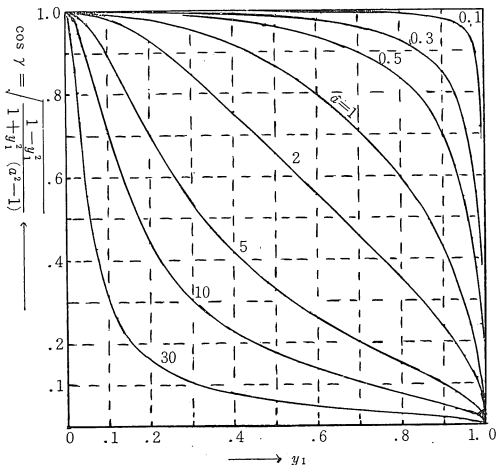


Fig 6

(b) En cas que l'axe est incliné pour le champ externe.

L'expression suivante est obtenue comme celle de la densité de la charge normalisée induite  $\sigma$  au point  $(x_1, y_1)$  en cas de l'inclinaison avec l'angle  $\theta$  entre l'axe et le champ externe.

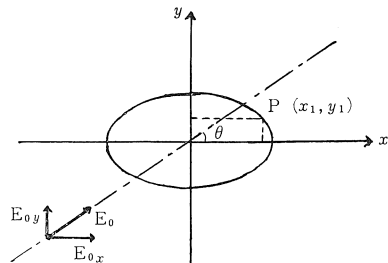


Fig 7

$$\sigma = \left( \frac{\sigma_s}{\epsilon_0 \epsilon_r} \right) = \left( -\frac{1}{\epsilon_r} \right) \left[ L_1 \sqrt{\frac{1-y^2}{1+(a^2-1)y^2}} \cos \theta + L_2 \frac{ay_1}{\sqrt{1+(a^2-1)y_1^2}} \sin \theta \right] \quad (17)$$

-1~+1, et signe de  $\sigma$  est possible à positif ou négatif,

Où,  $\sigma_s$  est la réelle densité de la charge à la surface. En ce cas, la portée variable de  $y$  est

Pour les paramètres,  $\epsilon_r=3$ ,  $a=2$ , et  $\theta=0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 85^\circ, 90^\circ$ , les courbes (17) sont données à la figure 8,

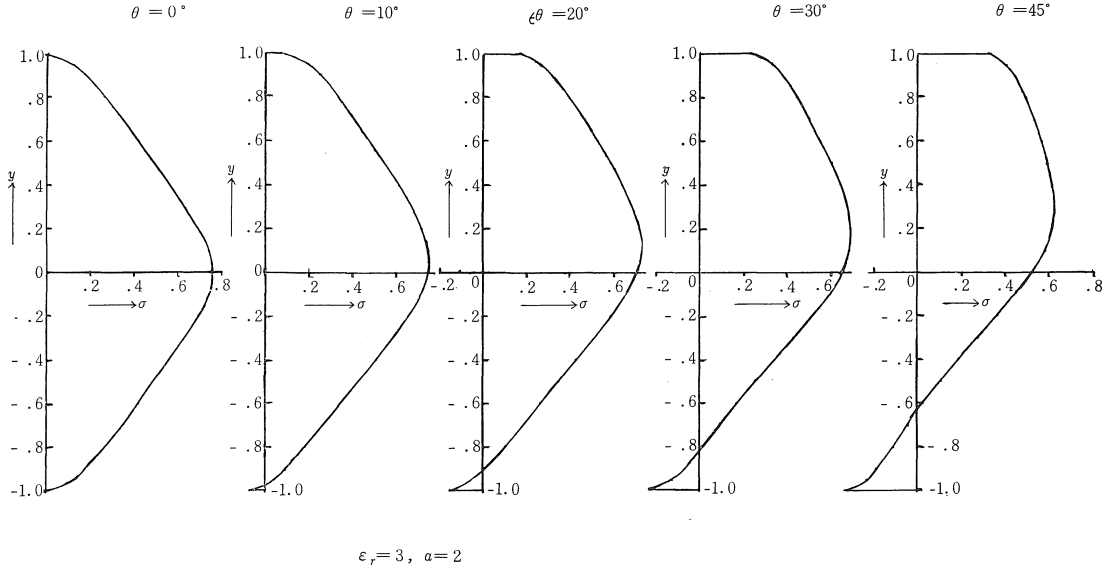


Fig 8-1

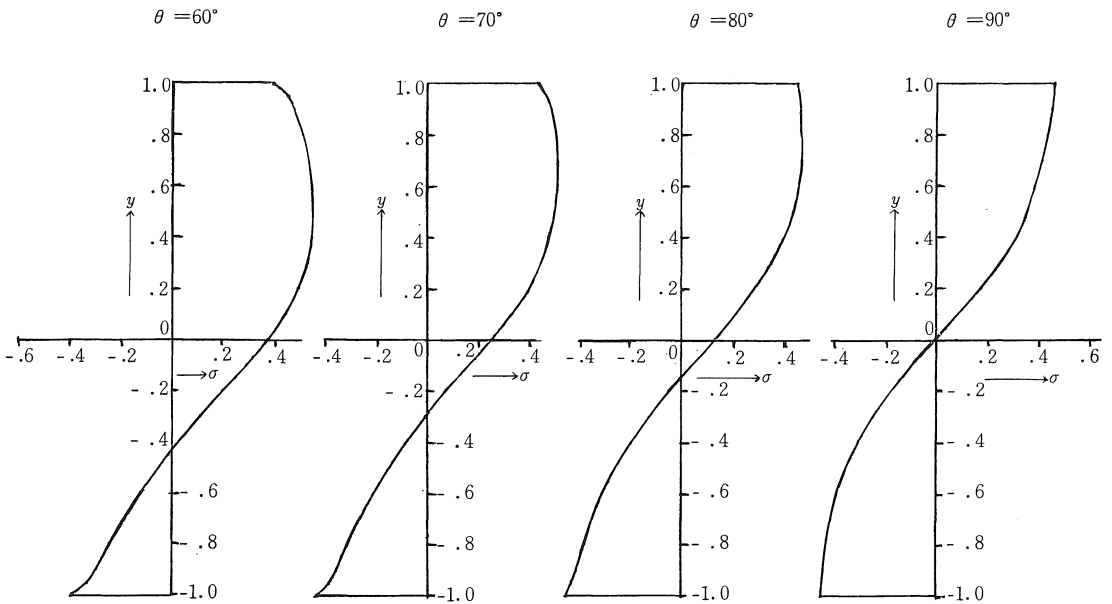


Fig 8-2

Bibliographie

- 1) Voir par exemple, Stratton Chap. III

a	$\frac{aA_1}{2}$	$\frac{aA_3}{2}$
0.0	1.000000	0.000000
0.1	0.860804	0.069597 <sub>9</sub>
0.2	0.750484	0.124758
0.3	0.661350	0.169325
0.4	0.588154	0.205923
0.5	0.527200	0.236400
0.6	0.475826	0.262087
0.7	0.432065	0.283967
0.8	0.394440	0.302780
0.9	0.361822	0.319089
1.0	0.333333	0.333333
2.0	0.173564	0.413218
3.0	0.108709	0.445645
4.0	0.075407 <sub>2</sub>	0.462296
5.0	0.055821 <sub>0</sub>	0.472089
6.0	0.043229 <sub>7</sub>	0.478385
7.0	0.034608 <sub>6</sub>	0.482696
8.0	0.028421 <sub>4</sub>	0.485789
9.0	0.023815 <sub>8</sub>	0.488092
10.0	0.020285 <sub>9</sub>	0.489857
20.0	0.006749 <sub>05</sub>	0.496626
30.0	0.003444 <sub>21</sub>	0.498278
40.0	0.002115 <sub>85</sub>	0.498942

Table 1.