愛知工業大学研究報告
第 38 号 A 平成 15 年

オイラー法による微分方程式の近似解の誤差評価について

On the error estimation of the approximate solution of differential equation by Euler's method

樋口　功*
Isao HIGUCHI

Abstract

By **the fundamental theorem of Cauchy-Lipschitz** , the existence and the uniqueness of the solution of the following initial value problem are assured:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \quad .$$

But we can not obtain the concrete form of the solution by the above fundamental theorem. In some elementary cases, the solution-function can be derived by simple calculations. But in many cases, the solution-function can not be obtained in general.

So we need to have their approximate solutions instead of their true solutions with the help of computer.

As the methods of finding the approximate solution, the Euler, the Heun and the Runge-Kutta methods are well known.

In the present paper, we shall give the error estimation of approximate solution obtained by **Euler's method** when $f(x,y)$ is **Lipschitz continuous**.

1. はじめに

正規形微分方程式の初期値問題;

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

の近似解法としては, **オイラー法, ホイン法** および **ルンゲ・クッタ法** が昔から知られている。

これらの方法は, パソコンの進歩により近年その有効性が見直されているが, 次に述べる**コーシー・リプシッツの基本定理**により保証されている, 解の存在と一意性をよりどころにして導かれた近似解法である。

物理学や工学では, 実際に目の前で生じている現象を扱う場合が多く, 解の存在と一意性はあまり問題にならない。

しかし, 解の存在と一意性をよりどころにして, 真の解の具体的な形が導かれることが多いし, 近似解が真の解に " 近い " ことも基本定理を用いて示されるので, 基本定理は理論上はもとより, 応用上も重要である。

本論では, オイラー法のよる近似解の誤差評価のついて考察したい。

*基礎教育センター・自然科学教室

2. コーシー・リプシッツの基本定理

微分方程式の解の存在と一意性を保証する基本的な次の定理を思い起こそう。

コーシー・リプシッツの基本定理. 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.1}$$

において, $f(x,y)$ は有界閉領域

$$D: \quad |x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b, \qquad (a, b > 0) \tag{2.2}$$

上で, 次の条件 (I), (II) を満たすとする。

(I) $f(x,y)$ は D 上で連続である。

(II) $f(x,y)$ は D 上でリプシッツの条件を満たす, すなわち, D 上の任意の 2 点 (x, y_1), (x, y_2) に対し

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{2.3}$$

を満たす定数 L が存在する。

このとき, 初期条件

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.4}$$

を満たす (1.1) の解 $y(x)$ が

$$|x - x_0| \leq c, \tag{2.5}$$

$$\text{ただし,} \quad c = min\Big(a, \frac{b}{M}\Big), \qquad M = max_{(x,y)\in D}\big|f(x,y)\big|$$

の範囲において存在する。しかもそのような解はただ一つである。

注意 1. 上に述べた基本定理は, 理論的に解の存在と一意性を保証してくれるが, 解 $y(x)$ の具体的な形を与えてはくれない。

右辺の $f(x,y)$ の形により, 解 $y(x)$ を x の関数として求められることもあるが, それは限られた場合である。

そこで, パソコンを用いて, 真の解の代用として, 近似解を求めざるを得なくなる。

数値解析のテキストでは, 近似解法の誤差, すなわち真の解と近似解の差, の評価に関して, なぜか, 右辺の関数 $f(x,y)$ が偏微分可能な場合のみに限られて, 論じられている。

しかし, コーシー・リプシッツの基本定理で扱われている関数 $f(x,y)$ はリプシッツ条件を満たせば十分で, 必ずしも偏微分可能とは限らない。

偏微分可能とは限らないが **リプシッツ連続** である関数 $f(x,y)$ に関する **オイラー法** による近似解の誤差評価が得られたので, 以下に報告したい。

3. オイラー法

区間 $[x_0, x]$ を n 等分し, その分点を次のように定める:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n = x \ 。$$

ここで,

$$h = x_k - x_{k-1} = \frac{x - x_0}{n}$$

と置くと, テーラー展開により, 任意の $f(x, y) \in C^1$ に対し次式が得られる:

$$\begin{aligned} y(x_k) &= y(x_{k-1}) + hy'(x_{k-1}) + \frac{h^2}{2!}y''(x_{k-1}) + \cdots \\ &= y(x_{k-1}) + hf(x_{k-1}, y(x_{k-1}) + 0(h^2) \ 。\end{aligned}$$

このとき, 真の解 $y(x)$ の $x = x_k$ における値 $y(x_k)$ の近似値 $\tilde{y}_k = \tilde{y}_K(x_k)$ を

$$\tilde{y}_0 = y_0, \qquad \tilde{y}_k = \tilde{y}_{k-1} + hf(x_{k-1}, \tilde{y}_{k-1}) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$$

で定義する方法を, **オイラー法** という。

オイラー法は, 区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上で $f(x, y)$ が一定の値 $f(x_{k-1}, \tilde{y}_{k-1})$ をとると仮定し, 積分値 $\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y)dx$ を $hf(x_{k-1}, \tilde{y}_{k-1})$ で近似させたものである。

注意 2 上で述べたように, オイラー法を導く過程でテーラーの定理を使っているため, $f(x, y)$ が C^1-級の関数である必要が生じる。

一方, **コーシー・リプシッツの基本定理** では, $f(x, y)$ の偏微分可能性は仮定されていないので, $f(x, y)$ が C^1-級の関数であるという条件は強すぎるということになる。

定義. 関数 $f(x, y)$ が次の領域 D で定義されているとする:

$$D: \ |x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b, \qquad (a, b > 0) \ 。$$

D 上の任意の 2 点 (x_1, y_1) および (x_2, y_2) に対し,

$$\big|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\big| \leq L\big\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\big\} \tag{3.1}$$

を満たす定数 L が存在するとき, $f(x, y)$ は D 上で **リプシッツ連続** であると言われる。

注意 3. 関数 $f(x, y)$ が D でリプシッツ連続であれば, $f(x, y)$ は D で連続かつリプシッツの条件を満たす。すなわち $f(x, y)$ は **コーシー・リプシッツの基本定理** における条件 (I) および (II) を満たす。

以下において, 関数 $f(x, y)$ が リプシッツ連続である場合に, オイラー法による近似解の誤差がどのように評価されるかを議論する。

4. オイラー法の誤差評価

オイラー法により得られる近似解の誤差に関して, 次の結果が得られた。

定理 微分方程式の初期値問題

$$(4.1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$(4.2) \qquad y(x_0) = y_0$$

において, $f(x,y)$ は有界閉領域

$$(4.3) \qquad D \; : \; |x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b, \qquad (a, b > 0)$$

上で **リプシッツ連続** であるとする。すなわち, D 上の任意の 2 点 (x_1, y_1) および (x_2, y_2) に対し

$$(4.4) \qquad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\}$$

を満たす定数 L が存在すると仮定する。

このとき, オイラー法による, n 等分して得られる近似解の誤差は $O\left(\frac{1}{n}\right)$ である。

すなわち, x 軸上の閉領域

$$(4.5) \qquad F \; : \; |x - x_0| \leq c \, ,$$

$$\text{ただし,} \; c = min\left(a, \frac{b}{M}\right), \qquad M = max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$$

および F 内の任意の点 x に対し, 点 x における真の解の値 $y(x)$ の, 区間 $[x_0, x]$ を n 等分して得られた **オイラー法** による近似値を $\tilde{y}_n(x)$ とすると, 次の不等式が得られる :

$$(4.6) \qquad |y(x) - \tilde{y}_n(x)| \; \leq \; (1 + M)e^{Lc} \times \frac{1}{n} \quad 。$$

注意 4. 上の定理により, これまで C^1-級の関数 $f(x,y)$ に対してのみ得られていたオイラー法による近似解の誤差評価が, 必ずしも微分可能とは限らない **リプシッツ連続** な関数 $f(x,y)$ に対しても得られたことになる。

従って, **コーシー・リプシッツの基本定理** における **「リプシッツの条件」** と, これまで知られていた誤差評価で常に登場する **「C^1-級であるという条件」** との間に生じていた, 理論と応用との間の奇妙なギャップを埋めることが出来たと言える。

また, 誤差が $O\left(\frac{1}{n}\right)$ と評価されたので, オイラー法による近似値は, 分割の個数 n を大きくすれば, いくらでも真の解の値に近づけられることも示された。「近似解」の「近似」たるが所以が示されたと言えよう。

次節で, 上の定理の証明を与えたい。

5. 定理の証明

最後に定理を証明する。

定理の証明　第 3 節で述べた **オイラー法** のアルゴリズムを振り返る。

x 軸上の閉領域 F を次のように決める：

$$(5.1) \qquad F \ : \ |x - x_0| \le c \ ,$$

$$\text{ただし，} \ c = min\Big(a, \frac{b}{M}\Big), \qquad M = max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|$$

さらに領域 F 内の任意の点 x を選び, 区間 $[x_0, x]$ を n 等分し, その分点を次のように定める:

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n = x \quad 。$$

ここで, 記述を簡単にするため,

$$h = x_{k+1} - x_k = \frac{x - x_0}{n}$$

と置く。

右辺の関数 $f(x,y)$ が有界閉領域 D 上でリプシッツ連続であると仮定したので, $f(x,y)$ は D 上で連続で更にリプシッツの条件を満たす。従って, コーシー・リプシッツの基本定理により, D 内で初期値問題の解 $y(x)$ がただ一つ存在する。
このとき, 真の解 $y(x)$ の x_k における値 $y(x_k)$ の近似値 $\tilde{y}_k = \tilde{y}_k(x_k)$ を

$$\tilde{y}_0 = y_0, \qquad \tilde{y}_k = \tilde{y}_k(x_k) = \tilde{y}_{k-1} + hf(x_{k-1}, \tilde{y}_{k-1}) \quad (k = 1, \ 2, \ 3, \ \cdots, \ n)$$

で定義するのがオイラー法であった。

先ず, $k = 1, \ 2, \ \cdots, \ n$ に対し, 次の式が成り立つことを示す:

$$(5.2) \qquad \big|y(x_k) - \tilde{y}_k\big| = \big|y(x_k) - \tilde{y}_k(x_k)\big|$$

$$\le \big|y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}(x_{k-1})\big|(1 + Lh) + L(1 + M)h^2 \quad 。$$

ここで, L はリプシッツ定数であり, $M = max_{(x,y)\in D}\big|f(x,y)\big|$ である。

実際,

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\big(x, y(x)\big)dx$$

$$\tilde{y}_k(x_k) = \tilde{y}_{k-1}(x_{k-1}) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\big(x_{k-1}, \tilde{y}_{k-1}\big)dx$$

を用いて, リプシッツ連続性に注意して $\big|y(x_k) - \tilde{y}_k(x_k)\big|$ を評価すると,

$$
\begin{aligned}
|y(x_k) - \tilde{y}_k(x_k)| &\leq |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}| + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big|f(x,y) - f(x_{k-1}, \tilde{y}_{k-1})\big| dx \\
&\leq |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}| + \int_{x_{k-1}}^{x_k} L\big\{|x - x_{k-1}| + |y(x) - \tilde{y}_{k-1}|\big\} dx \\
&\leq |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}| + Lh^2 + L\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big\{|y(x) - y(x_{k-1})| + |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}|\big\} dx \\
&\leq |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}| + Lh^2 + L\int_{x_{k-1}}^{x_k} \big\{|y'(\xi_{k-1})||x - x_{k-1}| + |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}|\big\} dx \\
&\leq |y(x_{k-1}) - \tilde{y}_{k-1}|(1 + Lh) + L(1 + M)h^2
\end{aligned}
$$

ここで, ξ_{k-1} は, $y(x)$ に関して平均値の定理が存在を保証する $[x_{k-1}, x_k]$ 内の点である。

以上で, 不等式 (5.2) が証明された。

さらに誤差を

$$E_n = y(x_n) - \tilde{y}_n(x_n) = y(x) - \tilde{y}_n$$

と置き, 不等式 (5.2) を繰り返し使い, $|E_n|$ を評価すると,

$$
\begin{aligned}
|E_n| &\leq |y(x_{n-1}) - \tilde{y}_{n-1}|(1 + Lh) + L(1 + M)h^2 \\
&\leq \big\{|y(x_{n-2}) - \tilde{y}_{n-2}|(1 + Lh) + L(1 + M)h^2\big\}(1 + Lh) + L(1 + M)h^2 \\
&= |y(x_{n-2}) - \tilde{y}_{n-2}|(1 + Lh)^2 + L(1 + M)\big\{1 + (1 + Lh)\big\}h^2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\leq |y(x_0) - \tilde{y}_0|(1 + Lh)^n \\
&\qquad + L(1 + M)\Big[1 + (1 + Lh) + (1 + Lh)^2 + \cdots + (1 + Lh)^{n-1}\Big]h^2
\end{aligned}
$$

ここで, $y(x_0) - \tilde{y}_0 = y_0 - y_0 = 0$ だから次式が得られる。

(5.3) $$|E_n| \leq L(1 + M)\Big[1 + (1 + Lh) + (1 + Lh)^2 + \cdots + (1 + Lh)^{n-1}\Big]h^2$$

不等式 (5.3) より $|E_n|$ の評価をさらに続ける。

$$|E_n| \leq L(1+M)\Big[1+(1+Lh)+(1+Lh)^2+\cdots+(1+Lh)^{n-1}\Big]h^2$$

$$= L(1+M)\frac{(1+Lh)^n-1}{(1+Lh)-1}h^2 = L(1+M)\frac{(1+Lh)^n-1}{Lh}h^2$$

$$\leq (1+M)\left\{\left(1+\frac{Lc}{n}\right)^n-1\right\}h \quad 。$$

ここで次の不等式および等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

に注意すると次の不等式が得られる：

$$|E_n| \leq (1+M)\left(1+\frac{Lc}{n}\right)^n h \leq (1+M)e^{Lc}h \quad 。$$

従って評価式 (4.6) が導かれ，定理の証明が終わる。

References

[1] I.Higuchi, Recurtion formulas of numerical integration based on the values at random abscissas, Proceeding of Conference on Potential Theory, A.I.T., 52-59(2000).

[2] I.Higuchi, On the convergence of approximate solutions by regula-falsi method, Bulletin of A.I.T.,36-A, 25-30(2001).

[3] I.Higuchi, On the convergence of the sequence of approximate solutions by linear inverse interpolation methodds, Proceeding of Conference on Potential Theory, Kyoto Sangyo Univ., 28-33(2002).

[4] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[5] R.Kress, Numerical analysis, Springer-Verlag, 1998.

[6] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[7] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

（受理　平成15年３月19日）