愛知工業大学研究報告
第 36 号 A 平成 13 年

Regula-Falsi 法による近似解の収束性について

On the Convergence of Approximate Solutions by *Regula-Falsi* Method

樋口　功
Isao HIGUCHI

Abstract

The *reegula-falsi* method is very practical when we search for the approximate solutions of non-linear equation $f(x) = 0$. Under the additional conditions on the smoothness of $f(x)$, we can verify that the approximation sequence obtained by the *regula-falsi* method converges to the true solurtion of $f(x) = 0$. But in the case that $f(x)$ is not smooth, the convergence of the approximate sequence can't be proved in general.

The main purpose of this paper is to obtain the following

Theorem. *Let $f(x)$ be continuous on the closed interval $[a, b]$. Suppose that $f(a) \cdot f(b) < 0$. Then both of the inferior and the superior limits of the approximate sequencee by the regula-falsi method are the true solutions of $f(x) = 0$.*

And we shall consider some applications of the above theorem.

1. はじめに.

昔から知られている二分法や *regula-falsi* 法は，コンピューターを使って方程式の近似解を求める際にも有効であり，昨今見直されている。

二分法による近似解の列は，すべての連続関数 $f(x)$ に対して，必ず真の解に収束する。　この事実は，有界単調数列の収束定理を用いて，簡単に証明される。

一方，*regula-falsi* 法で求めた近似解の列 $\{\alpha_n\}$ が真の解 α に収束するためには，区間内に解が唯一つしか存在しないと仮定するか，あるいは，関数 $f(x)$ に滑らかさが要求される。　言いかえると，平均値の定理やテイラーの定理が使えない一般の連続関数に対しては，形式的に得られ，近似解と考えられていたものが，本当に真の解に”近づいていく”かどうかは，実は分からない。　特に，$y = f(x)$ のグラフが真の解 α の近くで x-軸の上下に激しく振動し，α の近傍に別の解がいくらでも存在するような場合の収束性は，これまで，十分には調べられてはいない。

近似解が実は真の解の近似になっていないならば，問題であろう。

そこで 本研究では，解が複数個存在する場合や，$f(x)$ が滑らかでない場合の近似解の収束性をどのように捉えたら良いのかを理論的に考察した。

小刻みに振動したり，必ずしも滑らかではない一般の連続関数に関する近似解の列の収束性に関して，次の定理が得られたので，報告したい。

定理. 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続で， $f(a)\cdot f(b)<0$ が成り立っているとする。 このとき，regula-falsi 法で得られた近似解の列を $\{\alpha_n\}$ とすると，数列 $\{\alpha_n\}$ の下極限および上極限は共に $f(x)=0$ の真の解となる。すなわち，

$$\underline{\alpha}=\liminf_{n\to\infty}\alpha_n, \qquad \bar{\alpha}=\limsup_{n\to\infty}\alpha_n$$

と置くと， $f(\underline{\alpha})=f(\bar{\alpha})=0$ が成り立つ。

注意. 区間内に解が複数個存在している場合でも，また，$f(x)$ が微分不可能な場合でも，上の定理は成り立つ。 またこの定理により，$\{\alpha_n\}$ の「極限」を,「下極限」あるいは「上極限」に置きかることで，近似解の列が，ある意味で，確かに真の解に近づいていくことが証明されたわけで,「近似解」という名前の所以が示されたことになる。

上の定理の応用として，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ の収束性に関する，次の四つに判定法が得られたので，合わせて報告する。

ここでは，常に $f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続で， $f(a)\cdot f(b)<0$ が成り立つと仮定する。

1．区間 $[a,b]$ 内に $f(x)=0$ の解が唯一つしか存在しないならば，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ は必ず真の解に収束する。

2．区間 $[a,b]$ 上で $f(x)$ が単調増加または単調減少であれば，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ は必ず真の解に収束する。

3．近似解の列 $\{\alpha_n\}$ が収束するならば，すなわち $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ が存在するならば，α は $f(x)=0$ の真の解である，すなわち， $f(\alpha)=0$ が成り立つ。

4．*regula-falsi* 法による縮小区間列を $\{[a_n,b_n]\}$ とし，

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n, \qquad B=\lim_{n\to\infty}b_n$$

と置くと，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ が真の解に収束するための必要十分条件は，次の三つの条件のうちの，いずれか一つが成り立つことである。

(1). $A=B$.
(2). $A\neq B$ かつ $f(A)=0<f(B)$.
(3). $A\neq B$ かつ $f(A)<0=f(b)$.

2. 準備.

区間 $[a,b]$ 上で連続な関数 $f(x)$ を考える。もし，$f(a)\cdot f(b)<0$ が成り立てば，中間値の定理により， $f(\alpha)=0$ を満たす $\alpha\in(a,b)$ が少なくとも一つは存在する。

残念ながら具体的な α の値は一般的には求まらない。 そこで，コンピューター等の力を借りて，真の解 α に代わる近似解を求めることになる。

方程式の近似解法としては，昔から，二分法，*regula-falsi* 法，割線法あるいはニュートン法などが知られている。ここでは先ず，近似解法の一つである *regula-falsi* 法のアルゴリズムを振り返る。

曲線 $y = f(x)$ のグラフを，両端点を結んだ直線で近似して，この直線と $x-$ 軸との交点を近似解とする方法が，*regula-falsi* 法である。

***regula-falsi* 法のアルゴリズム.**

1．$f(a) \cdot f(b) < 0$ となる区間 $[a, b]$ を選ぶ。

2．2 点 $(a, f(a))$,　$(b, f(b))$ を結ぶ直線と，
$x-$ 軸の交点の x 座標を α_0 と書き，第 0 近似解と言う。

3．(i)　$f(\alpha_0)f(a) > 0$ のとき，
$$a_1 = \alpha_0, \qquad b_1 = b$$
と置く。

(ii)　$f(\alpha_0) \cdot f(a) < 0$ のとき，
$$a_1 = a, \qquad b_1 = \alpha_0$$
と置く。

(iii) $f(\alpha_0) = 0$ のとき，α_0 は $f(x) = 0$ の解である。

4．区間 $[a_1, b_1]$ に対し，$f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ だから，操作 2 を行い得られた交点の $x-$ 座標を α_1 と書き，第 1 近似解と呼ぶ。

操作 2，3，4 を繰り返すことにより，解が存在する区間を次々に狭められる。この操作により得られる $\{\alpha_n\}$ および $\{[a_n, b_n]\}$ をそれぞれ，*regula-falsi* 法による**近似解列**，および**縮小区間列** と呼ぶ。

3. 縮小区間列の端点の収束性.

補題 1.　近似解列 $\{\alpha_n\}$ および縮小区間列 $\{[a_n, b_n]\}$ に関し，次の式が成り立つ。

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \tag{3.1}$$

$$\alpha_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} \tag{3.2}$$

$$\alpha_n = a_n - \frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n) \tag{3.3}$$

$$b_n - \frac{f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n) \tag{3.4}$$

$$a_n < \alpha_n < b_n \tag{3.5}$$

証明.　2 点 $(a_n, f(a_n))$,　$(b_n, f(b_n))$ を結ぶ直線の方程式は

$$y = f(a_n) + \frac{(f(b_n) - f(a_n))}{b_n - a_n}(x - a_n)$$

ここで $y = 0$ と置けば (3.2) が得られ，続いて (3.3), (3.4), (3.5) が得られる。

近似解の列は，一般的には収束するとは限らないが，縮小区間列の左右の端点の一方は，次の補題が示す通り，真の解に必ず収束する。

補題 2. 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続で，$f(a)\cdot f(b)<0$ を満たすとする。 *regula-falsi* 法による縮小区間列を $\{[a_n,b_n]\}$ とすると，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のうち少なくとも一つは $f(x)=0$ の解に収束する。

証明. 縮小区間列の作り方から

$a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le b_n \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b$

従って有界単調数列の収束定理より $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共に収束する。

以下， $A=\lim_{n\to\infty} a_n$, $B=\lim_{n\to\infty} b_n$ と置く。

(I) $A=B$ のときを考える。

$$0 \ge \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) = f(B) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$$

ゆえに $f(A)=f(B)=0$ で，$A\ (=B)$ は $f(x)=0$ の解である。

(II) $A \ne B$ のときを考える。

先ず $f(A)<0<f(B)$ が成り立つと仮定して矛盾を導く。

補題 1 の (3.4), (3.5) より，$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ が存在し

$$\alpha = A - \frac{f(A)}{f(B)-f(A)}(B-A) > A$$

同様に，$\alpha<B$ も成り立つので，合わせて，$A<\alpha<B$ となる。従って，

$\varepsilon_1=\alpha-A>0$ に対し，次式を満たす n_1 が存在する。

$$\alpha_n > \alpha-\varepsilon_1 = \alpha-(\alpha-A) = A, \quad \forall n>n_1$$

$\varepsilon_2=B-\alpha>0$ に対し，次式を満たす n_2 が存在する。

$$\alpha_n < \alpha+\varepsilon_2 = \alpha+(B-\alpha) = B, \quad \forall n>n_2$$

ここで $n_0=max(n_1,n_1)$ と置くと，任意の $n>n_0$ に対し， $A<\alpha_n<B$ が成り立つ。

一方，縮小区間列の作り方から， $\alpha_n=a_{n+1}\le A$ または $\alpha_n=b_{n+1}\ge B$ となり， $A<\alpha_n<B$ に矛盾する。

よって $f(A)<0<f(B)$ は起こり得ない。

同様に，$f(A)>0>f(B)$ とすると矛盾が生じ，この場合も起こり得ない。

従って， $A\ne B$ のとき $f(A)\cdot f(B)=0$ が成り立つ。

以上より， (I) および (II) のいずれの場合でも， A あるいは B のうちの少なくとも一つは $f(x)=0$ の解となる。

注意. 具体的な計算例に当たると，縮小区間列の右端あるいは左端の一方が固定されてしまうことが多いが，上の補題は，その当たりの事情を理論的に説明している。また縮小区間列を追っていけば，真の解を予想できることも，理論的に示している。

4. 近似解の列の収束性.

次の定理が本研究で得られた主結果である。

定理. 関数 $f(x)$ が $[a,b]$ 上で連続で，$f(a)\cdot f(b)<0$ を満たすとする。 このとき，*regula-falsi* 法で得られる方程式 $f(x)=0$ の近似解の列を $\{\alpha_n\}$ とすれば，数列 $\{\alpha_n\}$ の**下極限**および**上極限**は共に $f(x)=0$ の解となる。 すなわち

$$\underline{\alpha}=\liminf_{\mathbf{n}\to\infty}\alpha_{\mathbf{n}},\qquad \bar{\alpha}=\limsup_{\mathbf{n}\to\infty}\alpha_{\mathbf{n}}$$

と置くと， $f(\underline{\alpha})=f(\bar{\alpha})=0$ が成り立つ。

証明. もし $A=B$ であれば $f(A)=f(B)=0$ となり，(3.5) 式より $\lim\alpha_n=\alpha$ が存在し，$\alpha=A=B$ で，$f(\alpha)=0$ となり，定理は成り立つ。

$A<B$ の場合にも定理が成り立つことを示す。

補題2より $f(A)\cdot f(B)=0$ であったから，下の (1), (2), (3) のいずれかが生じる。

(1) $f(A)=0,\ \ f(B)\neq 0$ のとき。 補題1の (3.3) より $\lim\alpha_n=\alpha$ が存在し

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha=A-\frac{f(A)}{f(B)-f(A)}(B-A)=A$$

となり，$f(\alpha)=f(A)=0$ が成り立ち，α は $f(x)=0$ の解となる。

(2) $f(A)\neq 0,\ \ f(B)=0$ のときも同様に， (3.4) より $\lim\alpha=\alpha$ が存在し，$\alpha=B$ が成り立って，α は $f(x)=0$ の解となる。

(3) $f(A)=f(B)=0$ のとき。 補題1の (3.5) より

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n\leq\liminf\alpha_n=\underline{\alpha}\leq\limsup\alpha_n=\overline{\alpha}\leq\lim_{n\to\infty}b_n=B$$

従って，$A<B$ かつ $A\leq\underline{\alpha}\leq\overline{\alpha}\leq B$ だから，次の $(i)\sim(iv)$ の場合が考えられる。

(i) $A=\underline{\alpha}<\overline{\alpha}=B$ のときは，$f(\underline{\alpha})=f(A)=0$ かつ $f(\overline{\alpha})=f(B)=0$ で定理は成り立つ。

(ii) $A<\underline{\alpha}\leq\overline{\alpha}=B$ のときは，$\lim\alpha_n=\alpha$ が存在して，$f(\alpha)=0$ となる。実際，$A<\underline{\alpha}$ より $\varepsilon=\underline{\alpha}-A>0$ に対し，次式を満たす n_0 が存在する。

$$\inf_{m\geq n}\alpha_m=\underline{\alpha_n}>\underline{\alpha}-\varepsilon=A,\qquad\forall n>n_0$$

よって，$\alpha_m>A\ (\forall m>n_0)$ となり，$\alpha_m=b_{m+1}\ (\forall m>n_0)$ だから，$\lim\alpha_m=\alpha$ が存在し，$\alpha=B$ が，従って $f(\alpha)=f(B)=0$ が成り立つ。

(iii) $A=\underline{\alpha}\leq\overline{\alpha}<B$ のときも (ii) と同様である。

(iv) $A<\underline{\alpha}\leq\overline{\alpha}<B$ のときは，$(ii),(iii)$ での考察と同様に，十分大きな n に対し，$A<\alpha_n<B$ が常に成り立ち，$\alpha_n\leq A$ または $\alpha_n\geq B$ であることに矛盾する。 ゆえに (iv) は実際には起こり得ない。

よって，$A\neq B$ のときは常に $f(\underline{\alpha})=f(\overline{\alpha})=0$ が成り立つ。

従って，すべての場合に，近似解の列の上極限および下極限は $f(x)=0$ の解となる。

注意. 区間内に解が複数個存在している場合でも，また，$f(x)$ が微分不可能な場合でも，上の定理は成り立つ。 またこの定理により，$\{\alpha_n\}$ の「極限」を，「下極限」あるいは「上極限」に置きかることで，近似解の列が，ある意味で，確かに真の解に近づいていくことが証明されたわけで，「近似解」という名前の所以が示されたことになる。

4. 定理の応用.

定理の系として，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ の収束性に関する以下の判定法が得られる。

この章では，常に $f(x)$ は $[a,b]$ 上で連続で， $f(a)\cdot f(b)<0$ が成り立つと仮定する。

系 1. 区間 $[a,b]$ 内に $f(x)=0$ の解が唯一つしか存在しないならば，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ は必ず真の解に収束する。

系 2. 区間 $[a,b]$ 上で $f(x)$ が単調増加または単調減少であれば，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ は必ず真の解に収束する。

系 3. 近似解の列 $\{\alpha_n\}$ が収束するならば，すなわち $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ が存在するならば，α は $f(x)=0$ の真の解である，すなわち， $f(\alpha)=0$ が成り立つ。

系 4. *regula-falsi* 法による縮小区間列を $\{[a_n,b_n]\}$ とし，

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n, \qquad B=\lim_{n\to\infty}b_n$$

と置くと，近似解の列 $\{\alpha_n\}$ が真の解に収束するための必要十分条件は，次の三つの条件のうちの，いずれか一つが成り立つことである。

(1). $A=B$.
(2). $A\neq B$ かつ $f(A)=0<f(B)$.
(3). $A\neq B$ かつ $f(A)<0=f(b)$.

定理および補題 2 より上の四つの系は直ちに示されるので，証明を省く。

References

[1] P.Davis and P.Rabinowitz, Metods of numerical integration, Academic Press Inc., 1984.

[2] F.B.Hildebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[3] R.Kress, Numerical analysis, Springer-Verlag, 1998.

[4] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[5] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

（受理　平成13年 3 月19日）