愛知工業大学研究報告
第 35 号 A 平成12年

閉型 4 点近似積分公式の一般形と最高の精度を持つ公式について

On the general form of the 4 points numerical integration of closed type and its best formula with highest accuracy

兼岡宜由*　　樋口功†
Takayosi KANEOKA　　Isao HIGUCHI

Abstract

The celebrated first Simpson's rule is obtained approximately from the function-values at 3 points on the interval of integration. On the other hand, the second Simpson's rule is based on the values at 4 points. And hence the latter may be expected to be slightly more accurate than the former. But acctually, the above two rules have the same order of accuracy.

In this paper, we start dealing with the function-valuese at random interior points

First, we shall derive the general form of the symmetric 4 points numerical integration formula of closed type with the same accuracy as that of the first or the second Simpson'rule.

Next we discuss widely the 4 points integration formula not necessarily symmetric.

And finally we shall give the concrete form of the best formula having the highest order of accuracy in all the 4 points numerical integration formulas.

*情報通信工学科
†自然科学教室

1. 序

近似積分公式の代表的なものとして，台形法および Simpson 法が古くから知られている。

台形法は，区間の両端上の２点を結ぶ直線で関数を近似した公式である。 Simpson 法は，区間の両端と中点上の３点を通る２次曲線で近似した公式であり， 第２ Simpson 法は， 両端点と二つの $\frac{1}{3}$ 分布点上の４点を通る３次曲線で近似した公式である。

数値積分論では，その精度が常に問題となる。 一般的には基準点の個数が増えるに従ってその精度も高まると予想されるが，それは必ずしも正しいとは限らない。

積分区間を $[a,b]$ とし， 巾を $h=b-a$ と置くと， 台形法の誤差は $O(h^3)$ であり，Simpson 法の誤差は $O(h^5)$ である。従ってこの場合，２点から３点に分布点を増やすことにより，確かに精度は高まっている。 一方，４点近似積分公式である第２ Simpson 法の誤差も， $O(h^5)$ のままで， せっかく３分割しても２分割である第１法則の場合と同じで， 精度は改良されていない。

筆者等は，情報工学科卒業研究において，分布の巾が一様ではなく不規則に分布された内点上の関数値から定まる４点近似積分公式の一般形を考察した。

先ず，対称な４点近似積分公式の一般形とその中で，最高の精度を持つものの具体的な形を決定することができた。 この最良の公式は同じ４点近似式ではあるが，第２ Simpson 法より２ランク精度が高いことも証明できた。

次に，非対称な４点近似積分公式に議論を広げ，その一般形を求めた。 さらにその中で最高の精度を持つものを決定しょうと試みたところ，対称な場合と同じ公式が得られた。 最良の公式は，対称性を持つことになる。

考察の過程で，第２ Simpson 法と同じ精度を持つ４点近似積分公式は，実は無数に存在することも証明できた。 第２ Simpson 法はその特別な場合として簡単に導かれることも分かった。

以上を報告する。

2. 対称な閉型４点近似積分公式の一般形

l を $0<l<1$ を満たす任意の実数とする。

$[a,b]$ 上の対称な４点，$x=a,\ a+lh,\ a+(1-l)h,\ a+h$ における関数値から作られる対称な積分近似公式を $\tilde{I}(f)$，その誤差を $E_{\tilde{I}}(f)$ と置く，すなわち

$$\tilde{I}(f)=h\Big\{pf(a)+qf(a+lh)+qf\Big(a+(1-l)h\Big)+pf(a+h)\Big\}$$

$$E_{\tilde{I}}(f)=\tilde{I}(f)-I(f)=\tilde{I}(f)-\int_a^{a+h}f(x)dx$$

定理 1.　任意の $l \in (0,1)$ に対し，$\tilde{I}(f)$ の精度が最も高くなるのは，

$$p = \frac{-6l^2+6l-1}{12l(1-l)}, \qquad q = \frac{1}{12l(1-l)}$$

のときである。　このとき $\tilde{I}(f)$ は

$$\tilde{I}(f) = \tilde{I}_l(f) = \frac{h}{12l(1-l)}\Big\{(-6l^2+6l-1)f(a)+f(a+lh)+f\Big(a+(1-l)h\Big)+(-6l^2+6l-1)f(a+h)\Big\}$$

と表される。またその誤差 $E_{\tilde{I}}(f)$ は

(1)　$f \in C^3$　に対し，　$O(h^4)$

(2)　$f \in C^n$ $(n \geq 4)$　に対し，　$O(h^5)$

となる。

証明.　$f \in C^3$　のとき，Taylor の定理より以下の式を満たす α, β, γ, δ が存在する。

$$I(f) = \int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h) - F(a) = f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f'''(\alpha)h^4$$

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+lh) + qf\Big(a+(1-l)h\Big) + pf(a+h)\Big\}$$

$$= h\Big[pf(a)$$

$$+q\Big\{f(a) + f'(a)(lh) + \frac{1}{2!}f''(a)(lh)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\beta)(lh)^3\Big\}$$

$$+q\Big\{f(a) + f'(a)\Big((1-l)h\Big) + \frac{1}{2!}f''(a)\Big((1-l)h\Big)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\gamma)\Big((1-l)h\Big)^3\Big\}$$

$$+p\Big\{f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(\delta)h^3\Big\}\Big]$$

誤差を計算すると

$$
\begin{aligned}
E_{\tilde{I}}(f) &= \tilde{I}(f) - I(f) \\
&= (2p+2q-1)f(a)h + \left\{ql + q(1-l) + p - \frac{1}{2!}\right\}f'(a)h^2 \\
&\qquad + \left[\frac{1}{2!}\left\{ql^2 + q(1-l)^2 + p\right\} - \frac{1}{3!}\right]f''(a)h^3 + O(h^4)
\end{aligned}
$$

従って, $E_{\tilde{I}}(f) = (h^4)$ となるためには, h, h^2, h^3, の係数を 0 として

$$
2p + 2q = 1, \qquad p + q = \frac{1}{2!}, \qquad \frac{1}{2!}\left\{ql^2 + q(1-l)^2 + p\right\} = \frac{1}{3!}
$$

が成り立てばよい。 これを解き, p, q を l で表すと,

$$
p = \frac{-6l^2 + 6l - 1}{12l(1-l)}, \qquad q = \frac{1}{12l(1-l)}
$$

となる。 このとき

$$
\tilde{I}(f) = \frac{h}{12l(1-l)}\left\{(-6l^2+6l-1)f(a) + f(a+lh) + f\Big(a+(1-l)h\Big) + (-6l^2+6l-1)f(a+h)\right\}
$$

で, $E_{\tilde{I}}(f) = O(h^4)$ が成り立つ。

$f \in C^n$ $(n \geq 4)$ のとき, Taylor の定理より以下の式を満たす λ, μ, ν, ξ が存在する。

$$
I(f) = \int_a^{a+h} f(x)dx = f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f'''(a)h^4 + \frac{1}{5!}f^{(4)}(\lambda)h^5
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}(f) &= h\left\{pf(a) + qf(a+lh) + qf\Big(a+(1-l)h\Big) + pf(a+h)\right\} \\
&= h\Big[pf(a) + q\left\{f(a) + f'(a)(lh) + \frac{1}{2!}f''(a)(lh)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(lh)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\mu)(lh)^4\right\} \\
&\quad + q\left\{f(a) + f'(a)(1-l)h + \frac{1}{2!}f''(a)\Big((1-l)h\Big)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)\Big((1-l)h\Big)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\nu)\Big((1-l)h\Big)^4\right\}
\end{aligned}
$$

$$+p\Big\{f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\frac{1}{3!}f'''(a)h^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)h^4\Big\}\Big]$$

よって誤差を計算すると

$$\begin{aligned}E_{\tilde I}(f)&=\tilde I(f)-I(f)\\&=(2p+2q-1)f(a)h+(p+q-\frac{1}{2!})f'(a)h^2\end{aligned}$$

$$+\Big[\frac{1}{2!}\Big\{ql^2+q(1-l)^2+1\Big\}-\frac{1}{3!}\Big]f''(a)h^3+\Big[\frac{1}{3!}\Big\{ql^3+q(1-l)^3+p\Big\}-\frac{1}{4!}\Big]f'''(a)h^4+O(h^5)$$

従って，$E_{\tilde I}(f)=O(h^5)$ となるには， h, h^2, h^3, h^4, の係数を 0 として

$$(*)\qquad p+q=\frac{1}{2},\qquad ql^2+q(1-l)^2+p=\frac{1}{3},\qquad ql^3+q(1-l)^3+p=\frac{1}{4}$$

が成り立てばよい。 初めの２式を満たす p, q, は

$$p=\frac{-6l^2+6l-1}{12l(1-l)},\qquad q=\frac{1}{12l(1-l)}$$

であったが，これを３番目の式の左辺へ代入すると，右辺の $\frac{1}{4}$ と等しくなる。 よって任意の $f\in C^n$ $(n\geq 4)$ に対し $\tilde I(f)$ の誤差は $O(h^5)$ となる。

これまでと同様な議論で，誤差の精度を上げて， $E_{\tilde I}(f)=O(h^6)$ となるためには，上の式 $(*)$ に加え，更に下の式が満たされる必要がある。

$$ql^4+q(1-l)^4+p=\frac{1}{5}$$

ところが，次の定理で示されるように，$(*)$ を満たす p, q, l, でこれを満たすのは限られた l の場合だけで，一般の l では満たされない。従って一般には，誤差の精度はこれ以上高められない。

注意. $\tilde I=\tilde I_l$ において、l は $(0,1)$ 内の任意の数だったから， Simpson および第２ Simpson 法と同じ精度を持つ閉型４点近似積分公式は，対称形だけでも，実は無数に存在することが示された。

定理 2.　閉型４点近似積分公式

$$\tilde{I}_l(f) = \frac{h}{12l(1-l)}\Big\{(-6l^2+6l-1)f(a)+f(a+lh)+f\Big(a+(1-l)h\Big)+(-6l^2+6l-1)f(a+h)\Big\}$$

の精度が最も高くなるのは

$$l = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$$

のときである。　よって最良の対称な閉型４点近似積分公式は

$$\tilde{I}_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}(f) = \frac{h}{12}\Big\{f(a) + 5f\Big(a + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\Big) + 5f\Big(a + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Big) + f(a+h)\Big\}$$

で，その誤差は

(1)　$f \in C^3$　に対し　$O(h^4)$

(2)　$f \in C^4$　に対し　$O(h^5)$

(3)　$f \in C^5$　に対し　$O(h^6)$

(4)　$f \in C^n \ (n \geq 6)$　に対し　$O(h^7)$

証明.　定理３の証明ですでに述べたように，$f \in C^n \ (n \geq 5)$ に対し，$E_{\tilde{I}_l}(f) = O(h^6)$ となるためには

$$(**) \quad p+q=\frac{1}{2}, \qquad ql^2+q(1-l)^2+p=\frac{1}{3},$$
$$ql^3+q(1-l)^3+p=\frac{1}{4}, \qquad ql^4+q(1-l)^4+p=\frac{1}{5}$$

が成り立てばよい。　初めの２式を満たす p, q は

$$p = \frac{-6l^2+6l-1}{12l(1-l)}, \qquad q = \frac{1}{12l(1-l)}$$

であったが，これらは上の３番目の式も満たす。　４番目の式に代入すると

$$\frac{1}{12l(1-l)}\left\{l^4+(1-l)^4+(-6l^2+6l-1)\right\}=\frac{1}{5}$$

となり，これを整理すると

$$5l^2-5l+1=0,$$

$$l=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$$

従って， $p=\frac{1}{12}$， $q=\frac{5}{12}$

となり， $\tilde{I}_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}(f)$ が求める最良の公式となる。

３数 p， q， l の値の決め方から， (1)，(2)，(3) は明らかである。
最後に (4) を示す。
これまでの方法から， $f\in C^n$ $(n\geq 6)$ に対し $E_{\tilde{I}}(f)=O(h^7)$ となるためには，(**) の４式に加え更に次の式が満たされる必要がある。

$$ql^5+q(1-l)^5+p=\frac{1}{6}$$

ところが， (**) から決められた $l=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}$， $p=\frac{1}{12}$， $q=\frac{5}{12}$ は，加えた上の式を確かに満たす。 従って (4) も成り立つ。

更に，１ランク上の精度を持つための条件式は

$$ql^6+q(1-l)^6+p=\frac{1}{7}$$

であるが，l，p，q，の上の値は，残念ながら，この式は満たさない。

従って，対称な閉型４点近似積分公式の精度は， $O(h^7)$ までである。

注意. 定理２の $\tilde{I}_{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}}(f)$ は，第１，第２ Simpson 公式より２ランク精度の高い対称な閉型点近似積分公式である。 第２ Simpson 公式と同じ４点近似の公式であることに注意したい。
また定理２では，Legendre 多項式の性質に頼らず，初等的な方法で， Gauss 型の閉型４点近似積分公式で最高精度のものを導いたことになる。

3. 非対称な閉型４点近似積分公式の一般形

定理3. l, m を $0 < l < m < 1$ を満たす任意の実数とする。閉型４点近似積分公式

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+lh) + rf(a+mh) + sf(a+h)\Big\}$$

の精度が最も高くなるのは

$$p = \frac{6lm - 2l - 2m + 1}{12lm}, \qquad q = \frac{1-2m}{12l(1-l)(l-m)}$$

$$r = \frac{1-2l}{12m(1-m)(m-l)}, \qquad s = \frac{6lm - 4l - 4m + 3}{12(1-l)(1-m)}$$

のときである。このときの $\tilde{I}$ を $\tilde{I}_{l,m}$ と置くと

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{l,m}(f) = \frac{h}{12lm(1-l)(1-m)(l-m)}\Big\{&(6lm-2l-2m+1)(1-l)(1-m)(l-m)f(a)\\ &+(1-2m)(1-m)mf(a+lh)\\ &-(1-2l)(1-l)lf(a+mh)\\ &+(6lm-4l-4m+3)(l-m)lmf(a+h)\Big\}\end{aligned}$$

で，任意の $f \in C^n$ $(n \geq 4)$ に対し

$$E_{\tilde{I}_{l,m}}(f) = O(h^5)$$

が成り立つ。

証明. 任意の $f \in C^4$ に対し，Taylor の定理より以下の式を満たす α, β, γ, δ が存在する。

$$\begin{aligned}I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h) - F(a)\\ &= f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)h^4 + \frac{1}{5!}f^{(4)}(\alpha)h^5\end{aligned}$$

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+lh) + rf(a+mh) + sf(a+h)\Big\}$$

$$= h\Big[pf(a)$$

$$+q\Big\{f(a) + f'(a)(lh) + \frac{1}{2!}f''(a)(lh)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(lh)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\beta)(lh)^4\Big\}$$

$$+r\Big\{f(a) + f'(a)(mh) + \frac{1}{2!}f''(a)(mh)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(mh)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\gamma)(mh)^4\Big\}$$

$$+s\Big\{f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\gamma)h^4\Big\}\Big]$$

誤差を計算すると

$$E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - I(f)$$

$$= (p+q+r+s-1)f(a)h + (ql+rm+s-\frac{1}{2!})f'(a)h^2$$

$$+\Big\{\frac{1}{2!}(ql^2+rm^2+s) - \frac{1}{3!}\Big\}f''(a)h^3 + \Big\{\frac{1}{3!}(ql^3+rm^3+s) - \frac{1}{4!}\Big\}f'''(a)h^4 + O(h^5)$$

従って, $E_{\tilde{I}}(f) = O(h^5)$ となるには, h, h^2, h^3, h^4 の係数を 0 として

$$(***) \qquad p+q+r+s = 1, \qquad ql+rm+s = \frac{1}{2},$$

$$ql^2+rm^2+s = \frac{1}{3}, \qquad ql^3+rm^3+s = \frac{1}{4}$$

ここで $(***)$ を, p, q, r, s を未知数とする連立方程式とみなしこれを解くと

$$p = \frac{6lm-2l-2m+1}{12lm}, \qquad q = \frac{1-2m}{12l(1-l)(l-m)}$$

$$r = \frac{1-2l}{12m(1-m)(m-l)}, \qquad s = \frac{6lm-4l-4m+3}{12(1-l)(1-m)}$$

となり, 与えられた l, m に対し, $\tilde{I}_{l,m}$ の形が定理で述べたように決まる。

$(***)$ より $f \in C^4$ に対し $O(h^5)$ となる。 一般にはこれ以上精度は高められない。

定理4. 必ずしも対称とは限らない閉型4点近似積分公式

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+lh) + rf(a+mh) + sf(a+h)\Big\}, \quad (0 < l < m < 1)$$

でその精度が最も高くなるのは

$$l = \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \quad m = \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \quad p = \frac{1}{12}, \quad q = \frac{5}{12}, \quad r = \frac{5}{12}, \quad s = \frac{1}{12}$$

のときである。 このとき

$$\begin{aligned}\tilde{I}(f) &= \tilde{I}_{\frac{5-\sqrt{5}}{10}, \frac{5+\sqrt{5}}{10}}(f) \\ &= \frac{h}{12}\Big\{f(a) + \frac{5}{12}f\Big(a + \frac{5-\sqrt{5}}{10}h\Big) + \frac{5}{12}f\Big(a + \frac{5+\sqrt{5}}{10}h\Big) + f(a+h)\Big\}\end{aligned}$$

となり，その誤差は， $f \in C^n$ $(n \geq 6)$ に対し $O(h^7)$ である。

証明. $f \in C^6$ に対し，Taylor の定理より以下の式を満たす $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が存在する。

$$\begin{aligned}I(f) &= \int_a^{a+h} f(x)dx = F(a+h) - F(a) \\ &= f(a)h + \frac{1}{2!}f'(a)h^2 + \frac{1}{3!}f''(a)h^3 + \cdots + \frac{1}{6!}f^{(5)}(a)h^6 + \frac{1}{6!}f^{(6)}(\alpha)h^7\end{aligned}$$

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+lh) + rf(a+mh) + sf(a+h)\Big\}$$

$$= h\Big[pf(a)$$

$$+q\Big\{f(a) + f'(a)(lh) + \frac{1}{2!}f''(a)(lh)^2 + \cdots + \frac{1}{5!}f^{(5)}(a)(lh)^5 + \frac{1}{6!}f^{(6)}(\beta)(lh)^6\Big\}$$

$$+r\Big\{f(a) + f'(a)(mh) + \frac{1}{2!}f''(a)(mh)^2 + \cdots + \frac{1}{5!}g^{(5)}(a)(mh)^5 + \frac{1}{6!}f^{(6)}(\gamma)(mh)^6\Big\}$$

$$+s\Big\{f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{5!}f^{(5)}h^5 + \frac{1}{6!}f^{(6)}(a+h)h^6\Big\}\Big]$$

$$= (p+q+r+s)f(a)h + (ql+rm+s)f'(a)h^2 + \frac{1}{2!}(ql^2+rm^2+s)f''(a)h^3$$

$$+\frac{1}{3!}(ql^3+rm^3+s)f'''(a)h^4 + \frac{1}{4!}(ql^4+rm^4+s)f^{(4)}h^5 + \frac{1}{5!}(ql^5+rm^5+s)f^{(5)}(a)h^6 + O(h^7)$$

このとき誤差 $E_{\tilde{I}}(f)=\tilde{I}(f)-I(f)$ が $O(h^7)$ となるように定数 l, m, p, q, r, s, の値を決めたい。 $I(f)$ と $\tilde{I}(f)$ の h, h^2, $\cdots$, h^6 の係数を比較すると

$$p+q+r+s=1, \quad ql+rm+s=\frac{1}{2}, \quad ql^2+rm^2+s=\frac{1}{3}$$

$(****)$

$$ql^3+rm^3+s=\frac{1}{4}, \quad ql^4+rm^4+s=\frac{1}{5}, \quad ql^5+rm^5+s=\frac{1}{6}$$

が成り立てばよい。 式 $(****)$ を, l, m, p, q, r, s を未知数とする 6 元連立方程式とみなし，これを解くと，

$$l=\frac{5-\sqrt{5}}{10}, \ m=\frac{5+\sqrt{5}}{10}, \ p=\frac{1}{12}, \ q=\frac{5}{12}, \ r=\frac{5}{12}, \ s=\frac{1}{12}$$

となる。 このとき

$$\tilde{I}(f)=\frac{h}{12}\Big\{f(a)+\frac{5}{12}f\Big(a+\frac{5-\sqrt{5}}{10}h\Big)+\frac{5}{12}f\Big(a+\frac{5+\sqrt{5}}{10}h\Big)+f(a+h)\Big\}$$

となり，その誤差は， $f\in C^n$ $(n\geq 6)$ に対し $O(h^7)$ である。

$f\in C^n$ $(n\geq 7)$ に対し， $E_{\tilde{I}}(f)=O(h^8)$ となるためには，これまでの議論と同様に式 $(****)$ に

$$ql^6+rm^6+s=\frac{1}{7}$$

を加える必要があるが，上で求めた l, m, p, q, r, s はこの式を満たさない。
従って，誤差の限界は $O(h^7)$ である。

注意. 定理 4 で求めた公式は第 2 Simpson 公式と同じ 4 点公式であるが，精度は 2 ランク高くなっている。

非対称である一般の 4 点公式まで議論を広げてみたが，定理 4 の示すとおり，最高の精度を持つ近似公式は，対称の場合であることが分かった。

定理 4 の証明には，被積分関数 $f(x)$ の近似多項式は表面に出てこないし，Legendre 多項式の性質も使われていないことに注意したい。

参考文献

[1] 篠崎壽夫，松下祐輔，応用数学計算法入門 (上)，(下)，コロナ社, 1971.

[2] 清水麻希子，冨永真琴，樋口功，誤差の評価から逆算した閉型積分近似公式について，愛知工業大学研究報告，34 号 A, 1999.

[3] 杉浦洋，入門数値計算，サイエンス社, 1997.

[4] 高田勝，機械計算法，養賢堂, 1994.

[5] 樋口功，シンプソン公式と同等の精度を持つ新台形公式について，愛知工業大学研究報告，34 号 A, 1999

[6] 山本哲朗，数値解析入門，サイエンス社, 1995.

[7] F.B.Hidebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[8] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[9] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

（受理　平成12年３月18日）