愛知工業大学研究報告
第 35 号 A 平成12年

数値積分の漸近展開による Euler-Maclaurin 総和公式の簡単な別証明

Another simpler proof of Euler-Maclaurin summation formula by the asymptotic expansion of numerical integration

伊野瀬崇*
Takasi INOSE

樋口功†
Isao HIGUCHI

Abstract

The Euler-Maclaurin summation formula plays an important role when we yield the correction formulas of numerical integrations or when we make the Romberg integration list.

But the proof of the above summation formula, given by using the properties of Bernoulli polynomial, is fairly complicated.

In this paper, fist we obtain some asymptotic expansions of numerical integration formulas by the terms of the mesuration by parts of higher order derivatives.

As an application, we derive so-called end-point correction formulas of mesuration by parts, mid-point rule, trapezoid rule and Simpson's rule independently from the Euler-Maclaurin summation formula.

Finally, we shall give an annother simpler and fundamental proof of the Euler-Maclaurin summation formula itself.

*情報通信工学科
†自然科学教室

1. 序

原始関数が簡単には求まらない関数の積分計算は近似積分公式に頼ることが多い。Newton-Cotes 型の積分公式の代表的なものとして，中点公式，台形公式および Simpson 公式が昔から知られている。

積分公式の精度を順次高めるための端点補正積分公式や Romberg の積分漸化公式は，Euler-Maclaurin の総和公式に依存しているが， Bernoulli 多項式の性質を用いてなされるその総和公式の証明はかなり込み入っている。

筆者等は，情報通信工学科・卒業研究において，定積分，台形公式，中点公式および Simpson 公式などのすべてを区分求積法を用いた漸近展開で表現することを考えた。

その応用として，有用な端点補正公式を，複雑な Euler-Maclaurin の総和公式を使うことなく，基本的事項のみを用いて簡単に導くことができた。またその過程で，Euler-Maclaurin の総和公式そのものの簡単な別証明も得ることができた。

以上をまとめて以下に報告する。

2. 積分公式の，区分求積法による漸近展開

関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であるとする。 $[a,b]$ を n 等分して，その分点を $x_i = a + i(b-a)/n (i = 0, 1, \ldots, n)$, 分割巾を $h = (b-a)/n$ としたとき

$$R(f) = f(x_0)h + f(x_1)h + \cdots + f(x_{n-1})h = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})h$$

$$T(f) = \frac{h}{2}\Big[\{f(x_0)+f(x_1)\}+\{f(x_1)+f(x_2)\}+\cdots+\{f(x_{n-1})+f(x_n)\}\Big] = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{i-1})+f(x_i)\}$$

$$M(f) = f(\frac{x_0+x_1}{2})h + f(\frac{x_1+x_2}{2})h + \cdots + f(\frac{x_{n-1}+x_n}{2})h = \sum_{i=1}^{n} f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})h$$

と置く。

$R(f), T(f)$ および $M(f)$ はそれぞれ，**区分求積分法**，**台形法**および**中点法**と呼ばれる近似積分公式である。

さらに $[a,b]$ を $2n$ 等分して，分点を $x_i = a + i(b-a)/(2n) (i = 0, 1, \ldots, 2n)$, 分割巾を $h = (b-a)/(2n)$ としたとき

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{h}{3}\Big[\{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\} + \{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\} \\ &\qquad + \cdots + \{f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\}\Big] \\ &= \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})\} \end{aligned}$$

と置く。

$S(f)$ は **Simpson 公式**と呼ばれる近似積分公式である。

定理 1. $f \in C^k$ に対し，次の等式が成り立つ。

$$(1)\quad I(f) = \int_a^b f(x)dx = R(f) + \frac{h}{2!}R(f') + \frac{h^2}{3!}R(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{k!}R(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

$$(2)\quad T(f) = R(f) + \frac{h}{1!2}R(f') + \frac{h^2}{2!2}R(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!2}R(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

$$(3)\quad M(f) = R(f) + \frac{h}{1!2}R(f') + \frac{h^2}{2!2^2}R(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!2^{k-1}}R(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

$$(4)\quad S(f) = R(f) + \frac{h}{2!}R(f'') + \frac{h^2}{3!}R(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{3(k-1)!}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k-2}}\right\}R(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

証明. (1). $[a,b]$ を n 分割したときの，第 i 番目の小区間上の定積分を

$$I_i = I_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

と置き，$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると，Taylor の定理より，

$$\begin{aligned} I_i &= F(x_i) - F(x_{i-1}) \\ &= hf(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2!}f'(x_{i-1}) + \frac{h^3}{3!}f''(x_{i-1}) \\ &\qquad + \cdots + \frac{h^k}{k!}f^{(k-1)}(x_{i-1}) + O(h^{k+1}) \end{aligned}$$

ここで　$I(f) = \sum_{i=1}^n I_i(f)$　より

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})h + \frac{h^2}{2!}\sum_{i=1}^n f'(x_{i-1}) + \frac{h^3}{3!}\sum_{i=1}^n f''(x_{i-1}) \\ &\qquad + \cdots + \frac{h^k}{k!}\sum_{i=1}^n f^{(k-1)}(x_{i-1}) + O(h^k) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})h + \frac{h}{2!}\sum_{i=1}^n f'(x_{i-1})h + \frac{h^2}{3!}\sum_{i=1}^n f''(x_{i-1})h \\ &\qquad + \cdots + \frac{h^{k-1}}{k!}\sum_{i=1}^n f^{(k-1)}(x_{i-1})h + O(h^k) \\ &= R(f) + \frac{h}{2!}R(f') + \frac{h^2}{3!}R(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{k!}R(f^{(k-1)}) + O(h^k) \end{aligned}$$

(2). 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での台形公式をを $T_i = T_i(f)$ とすると, Taylorの定理より

$$T_i = \frac{h}{2}\Big\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big\}$$

$$= \frac{h}{2}f(x_{i-1}) + \frac{h}{2}\Big\{f(x_{i-1}) + hf'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2!}f''(x_{i-1}) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_{i-1})$$

$$+ \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_{i-1}) + O(h^k)\Big\}$$

$$= hf(x_{i-1}) + \frac{h^2}{1!2}f'(x_{i-1}) + \frac{h^3}{2!2}f''(x_{i-1})$$

$$+ \cdots + \frac{h^k}{(k-1)!2}f^{(k-1)}(x_{i-1}) + O(h^{k+1})$$

ここで $T(f) = \sum_{i=1}^n T_i(f)$ より

$$T(f) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})h + \frac{h^2}{1!2}\sum_{i=1}^n f'(x_{i-1}) + \frac{h^3}{2!2}\sum_{i=1}^n f''(x_{i-1})$$

$$+ \cdots + \frac{h^k}{(k-1)!2}\sum_{i=1}^n f^{(k-1)}(x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n O(h^{k+1})$$

$$= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})h + \frac{h}{1!2}\sum_{i=1}^n f'(x_{i-1})h + \frac{h^2}{2!2}\sum_{i=1}^n f''(x_{i-1})h$$

$$+ \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!2}\sum_{i=1}^n f^{(k-1)}(x_{i-1})h + O(h^k)$$

$$= R(f) + \frac{h}{1!2}R(f') + \frac{h^2}{2!2}R(f'') + \cdots + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!2}R(f^{(k-1)}) + O(h^k)$$

(3). 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での中点公式を $M_i = M_i(f)$ とすると, Taylor の定理より

$$M_i = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)h$$

$$= f(x_{i-1})h + f'(x_{i-1})\frac{h}{2}h + \frac{1}{2!}f''(x_{i-1})\left(\frac{h}{2}\right)^2 h + \frac{1}{3!}f'''(x_{i-1})\left(\frac{h}{2}\right)^3 h$$

$$+ \cdots + \frac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_{i-1})\left(\frac{h}{2}\right)^{k-1} h + O(h^{k+1})$$

が成り立つ。

$I(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)$ だから, 上で得られた式の全区間にわたる和をとれば, (3) が得られる。

(4). $T(f), M(f)$ および $S(f)$ の間で成り立つ関係式

$$S(f) = \frac{T(f) + 2M(f)}{3}$$

に注意すれば, (2) および (3) より直ちに (4) が得られる。

注意. 定理 1 により, 定積分や近似積分公式の代表的なものが, すべて区分求積法を用いて表現できることが分かった。 従って, 区分求積法の性質が分かれば, 定理 1 により, 他の積分公式の性質も調べられる。 その意味でも, 積分公式の基本は区分求積法であると言える。

以下において, 先ず, 区分求積法の端点補正公式を, 定理 1 の (1) を用いた初等的な方法で導く。 次に区分求積法の端点補正公式と定理 1 の (2), (3) および (4) より, 台形法, 中点法および Simpson 法の端点補正公式を導く。

最後に, これまた定理 1 の応用として, Euler-Maclaurin の総和公式の初等的かつ簡単な別証明を与えたい。

通常は順序が逆で, 複雑な Bernoulli 多項式の性質を巧みに使って, Euler-Maclaurin の総和公式を先ず導き, その総和公式を用いて, 積分近似公式の端点補正公式が導かれることに注意したい。

3. 区分求積法の端点補正

区分求積分法に関する次のような端点補正公式が成り立つ。

定理 2. 十分滑らかな関数 $f(x)$ に対し,

$$I(f)=R(f)+\frac{h}{2}\Big\{f(b)-f(a)\Big\}-\frac{h^2}{12}\Big\{f'(b)-f'(a)\Big\}$$
$$+\frac{h^4}{720}\Big\{f'''(b)-f'''(a)\Big\}-\frac{h^6}{30240}\Big\{f^{(5)}(b)-f^{(5)}(a)\Big\}+\cdots$$

が成り立つ。 ここで,

$$h^k\Big\{f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\Big\}$$

の係数 C_k は

$$c_1=\frac{1}{2!}\ ,\ \ \frac{c_1}{2!}+c_2=\frac{1}{3!}\ ,\ \ \frac{c_1}{3!}+\frac{c_2}{2!}+c_3=\frac{1}{4!}$$

$$\frac{c_1}{k!}+\frac{c_2}{(k-1)!}+\cdots+\frac{c_{k-1}}{2!}+c_k=\frac{1}{(k+1)!}\ \ ,\ \cdots$$

により順次定まる定数である。

証明. 十分滑らかな関数 $f(x)$ に対し, 定理 1 の (1) より

$$(*)\qquad I(f)=R(f)+\frac{h}{2!}R(f')+\frac{h^2}{3!}R(f'')+\frac{h^3}{4!}R(f''')+\cdots$$

$(*)$ において f の代わりに f' を代入すると,

$$I(f')=R(f')+\frac{h}{2!}R(f'')+\frac{h^2}{3!}R(f''')+\frac{h^3}{4!}R(f^{(4)})+\cdots$$

従って, $(*)$ から $I(f')$ の $\frac{h}{2!}$ 倍を引いて $hR(f')$ の項を消去すると

$$(**) \qquad I(f) = R(f) + \frac{h}{2}I(f') - \frac{h^2}{12}R(f'') - \frac{h^3}{24}R(f''') - \frac{h^4}{80}R(f^{(4)}) - \frac{h^5}{360}R(f^{(5)}) - \cdots$$

$(*)$ において f の代わりに f'' を代入すると

$$I(f'') = R(f'') + \frac{h}{2!}R(f''') + \frac{h^2}{3!}R(f^{(4)}) + \frac{h^3}{4!}R(f^{5)}) + \frac{h^4}{5!}R(f^{(6)}) + \cdots$$

ここで $(**)$ に上の $I(f'')$ の $\frac{h^2}{12}$ 倍を加えると， h^2 および h^3 の項が消去されて次の式が得られる。

$$I(f) = R(f) + \frac{h}{2}I(f') - \frac{h^2}{12}I(f'') + \frac{h^4}{720}R(f^{(4)}) + \frac{h^5}{1440}R(f^{(5)}) + \cdots$$

この方法を繰り返すと，求める区分求積法の端点公式が得られる。

証明の最後に，係数に関する漸化式を導く。

$$\begin{aligned}
I(f) &= R(f) + c_1hI(f') + c_2h^2I(f'') + c_3h^3I(f''') + \cdots \\
&= R(f) + c_1h\Big\{R(f') + \frac{h}{2!}R(f'') + \frac{h^2}{3!}R(f''') + \cdots\Big\} \\
&\qquad +c_2h^2\Big\{R(f'') + \frac{h}{2!}R(f''') + \frac{h^2}{3!}R(f^{(4)}) + \cdots\Big\} \\
&\qquad +c_3h^3\Big\{R(f''') + \frac{h}{2!}R(f^{(4)}) + \cdots\Big\} \\
&= R(f) + c_1hR(f') + \left(\frac{c_1}{2!} + c_2\right)h^2R(f'') \\
&\qquad +\left(\frac{c_1}{3!} + \frac{c_2}{2!} + c_3\right)h^3R(f''') + \cdots
\end{aligned}$$

一方，定理 1 の (1) より

$$I(f) = R(f) + \frac{h}{2!}R(f') + \frac{h^2}{3!}R(f'') + \frac{h^3}{4!}R(f''') + \cdots$$

だから， 2 式の係数を比較すると， 求める漸化式が得られる。

定理２および定理１の (2), (3) および (4) より，台形法，中点法および Simpson 法の端点補正公式が得られる。すなわち

系. 十分滑らかな関数 $f(x)$ に対し，次の端点補正公式が成り立つ。

$$I(f)=T(f)+\frac{h^2}{12}\Big\{f'(b)-f'(a)\Big\}-\frac{h^4}{720}\Big\{f'''(b)-f'''(a)\Big\}+\cdots$$

$$I(f)=M(f)-\frac{h^2}{24}\Big\{f'(b)-f'(a)\Big\}+\frac{7h^4}{5760}\Big\{f'''(b)-f'''(a)\Big\}+\cdots$$

$$I(f)=S(f)+\frac{h^4}{2880}\Big\{f'''(b)-f'''(a)\Big\}+\cdots$$

証明. 定理２の区分求積法の端点補正公式によると

$$R(f)=I(f)-\frac{h}{2}I(f')+\frac{h^2}{12}I(f'')-\frac{h^2}{720}I(f^{(4)})+\cdots$$

一方定理１の (2) より

$$\begin{aligned}T(f)&=R(f)+\frac{h}{2}R(f')+\frac{h^2}{4}R(f'')+\frac{h^3}{12}R(f''')+\cdots\\&=\Big\{I(f)-\frac{h}{2}I(f')+\frac{h^2}{12}I(f'')-\frac{h^4}{720}I(f^{(4)})+\cdots\Big\}\\&\quad+\frac{h}{2}\Big\{I(f')-\frac{h}{2}I(f'')+\frac{h^2}{12}I(f''')-\cdots\Big\}\\&\quad+\frac{h^2}{4}\Big\{I(f'')-\frac{h}{2}I(f''')+\frac{h^2}{12}I(f^{(4)})-\cdots\Big\}\\&\quad+\frac{h^3}{12}\Big\{I(f''')-\frac{h}{2}I(f^{(4)})+\frac{h^2}{12}I(f^{(5)})-\cdots\Big\}+\cdots\end{aligned}$$

これを整理すると次の台形法の端点補正公式となる。

$$I(f)=T(f)+\frac{h^2}{12}I(f'')-\frac{h^4}{720}I(f^{(4)})+\cdots$$

中点法および Simpson 法の端点公式も，区分求積法の端点公式と定理１から，台形法の端点補正公式と同様に導かれる。

4. Euler-Maclaurin の総和公式の簡単な別証明

最後に，Euler-Maclaurin の総和公式を， Bernoulli 数を用いない次の形で表し，初等的でかつ簡単な別証明を与える。

定理 3. 関数 $f(x)$ は必要なだけ滑らかであるとする。 区間 $[a,b]$ を n 等分し，その分点を $x_i = a + i(b-a)/n$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$，分割巾を $h = (b-a)/n$ とすれば，次の総和公式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)h = \int_a^b f(x)\,dx + \frac{h}{2}\Big\{f(b)+f(a)\Big\} + \frac{h^2}{12}\Big\{f'(b)-f'(a)\Big\} - \frac{h^4}{720}\Big\{f'''(b)-f'''(a)\Big\} + \cdots$$

ここで，

$$-h^k\Big\{f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\Big\} = h^k\Big\{f^{(k-1)}(a) - f^{(k-1)}(b)\Big\}$$

の係数 c_k $(k = 2,\ 3,\ ,\ldots,\ )$ は漸化式

$$c_1 = \frac{1}{2!}\,,\ \frac{c_1}{2!} + c_2 = \frac{1}{3!}\,,\ \frac{c_1}{3!} + \frac{c_2}{2!} + c_3 = \frac{1}{4!}\,,\ \cdots$$

$$\frac{c_1}{k!} + \frac{c_2}{(k-1)!} + \cdots + \frac{c_{(k-1)}}{2!} + c_k = \frac{1}{(k+1)!}\,,\ \cdots$$

により順次定まる定数である。

証明. 定理 2 の区分求積法より

$$\begin{aligned} R(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h \\ &= I(f) - \frac{h}{2}\Big\{f(b) - f(a)\Big\} + \frac{h^2}{12}\Big\{f'(b) - f'(a)\Big\} \\ &\qquad - \frac{h^4}{720}\Big\{f'''(b) - f'''(a)\Big\} + \frac{h^6}{30240}\Big\{f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)\Big\} + \cdots \end{aligned}$$

この式の両辺に $f(x_n) = f(b)$ を加えたものがまさに Euler-Maclaurin の総和公式である。 係数の漸化式は，すでに定理 2 で得られている。

参考文献

[1] 篠崎壽夫，松下祐輔，応用数学計算法入門 (上)，(下), コロナ社, 1971.

[2] 清水麻希子，冨永真琴，樋口功，誤差の評価から逆算した閉型積分近似公式について，愛知工業大学研究報告，34 号 A, 1999.

[3] 杉浦洋，入門数値計算，サイエンス社, 1997.

[4] 高田勝，機械計算法，養賢堂, 1994.

[5] 秦野和郎, 複合積分則の剰余項について，数値解析とアルゴリズム予稿集，京都大学数理解析研究所 1991

[6] 樋口功，シンプソン公式と同等の精度を持つ新台形公式について，愛知工業大学研究報告，34 号 A, 1999

[7] 山本哲朗，数値解析入門，サイエンス社, 1995.

[8] F.B.Hidebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[9] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[10] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

（受理　平成12年３月18日）