愛知工業大学研究報告
第 34 号 A 平成11年

誤差の評価から逆算した閉型積分近似公式について

On the numerical integral formulas of closed type calculated inversely from the error estimations

清水麻希子* 冨永真琴† 樋口功‡
Makiko SIMIZU Makoto TOMINAGA Isao HIGUCHI

Abstract

In this paper, we try to derive some numerical integral formulas inversely from the error estimations and shall obtain a new trapezoid rule having the precision between that of the classical trapezoid rule and of the Simpson's rule.

And further, we shall prove that the precision of the Simpson's rule is best in all of the three points integral formulas of closed type.

1. 序

原始関数が簡単には求まらない関数の積分計算は近似積分公式に頼ることが多い。Newton-Cotes 型の積分公式の代表的なものとして，中点公式，台形公式および Simpson 公式が昔から知られている。

区間 $[a, b]$ 上で十分滑らかな関数 $f(x)$ に対する積分公式の誤差は，$h = b - a$ としたとき，中点および台形公式では共に $O(h^3)$ であり，Simpson 公式では $O(h^5)$ であることが分かっているが，なぜか中間の $O(h^4)$ の誤差を持つ積分公式についての考察が欠落している。

中点および台形公式は，被積分関数 $f(x)$ を一次式で近似して導かれ，Simpson 公式は二次式で近似して導かれる。誤差は，当然のことながら，後から評価される。

筆者等は，情報通信工学科・卒業研究において，誤差の評価から出発して，逆算する形で積分公式を導くことを考えてみた。その過程で，次の結果が得られた。

*情報通信工学科
†情報通信工学科
‡自然科学教室

(1) 古典的な中点および台形公式と同じ精度の，すなわち，誤差が $O(h^3)$ となる閉型の一般３点積分公式を定式化した (定理１を参照)。

(2) 誤差が同じく $O(h^3)$ となる半閉型台形公式の一般形を導いた (定理２を参照)。

(3) 台形公式と Simpson 公式の中間の精度を持つ，すなわち，誤差が $0(h^4)$ となる閉型の一般３点積分公式を定式化し，その幾何学的意味を考察した (定理３，４を参照)。

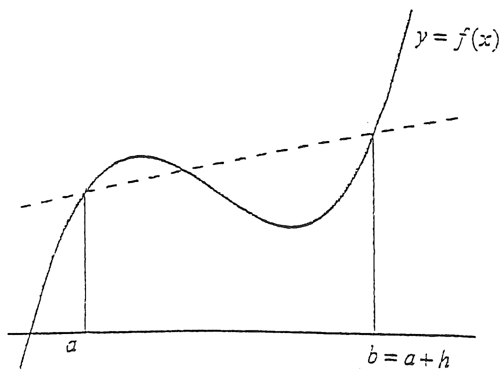
(4) 誤差が $O(h^4)$ となる半閉型台形公式が二つだけ存在することを示し，更にその新台形公式の具体的形を与えた (定理５を参照)。

(5) 閉型の一般３点積分公式の中で，誤差が $O(h^5)$ となるのは Simpson 公式に限られることを証明した (定理６を参照)。

上の結果から，誤差が $O(h^3)$ と $O(h^5)$ の中間の $O(h^4)$ となる２点または３点積分公式が無数に存在することが分かり，かつ，Simpson 公式がそれらの中で最良の精度を持つことも証明されたので，Simpson 公式を採用する妥当性が示されたことになる。

以上をまとめて報告する。

2. 古典的台形公式および Simpson 公式のアルゴリズム



左図のように，関数 $f(x)$ を，２点

$$(a, (f(a)),\ (b, f(b))$$

を通る直線で近似し積分したものを，**台形公式** という。

台形の面積は $\dfrac{(\text{上底}+\text{下底})\times(\text{高さ})}{2}$ で計算されるから，台形公式は

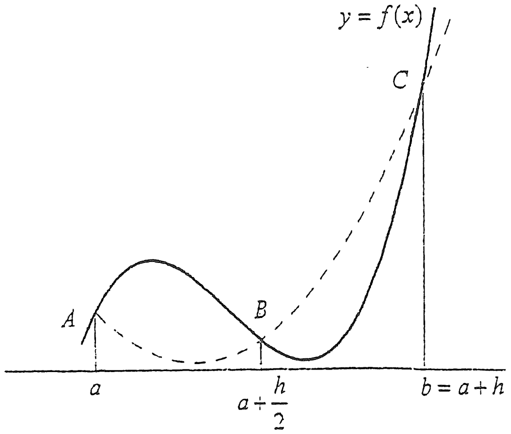
$$T(f) = \frac{h}{2}\{f(a) + f(a+h)\},\quad h = b - a$$

で与えられる。

台形公式の誤差を $E_T(f)$ とおく，すなわち，

$$E_T(f) = T(f) - \int_b^a f(x)dx$$

とおくと，$E_T(f) = O(h^3)$ が成り立つ (参考文献を参照)。



左図のように，関数 $f(x)$ を３点
$(a, f(a))$,
$(a+\frac{h}{2}, f(a+\frac{h}{2}))$,
$(a+h, f(a+h))$, $h=b-a$
を通る放物線で近似し積分した公式を **Simpson 公式** という。

上の３点を通る放物線の方程式は,

$$y_0 = f(a),\ y_1 = f(a+\frac{h}{2}),\ y_2 = f(a+h)$$

とおくと,

$$y = y_0 + \frac{2(y_1-y_0)}{h}(x-a) + \frac{2(y_0-2y_1+y_2)}{h^2}(x-a)(x-a-\frac{h}{2})$$

となるから，Simpson 公式は, これを積分して,

$$S(f) = \frac{h}{6}\Big\{f(a) + 4f(a+\frac{h}{2}) + f(a+h)\Big\}$$

で与えられる。
Simpson 公式の誤差を

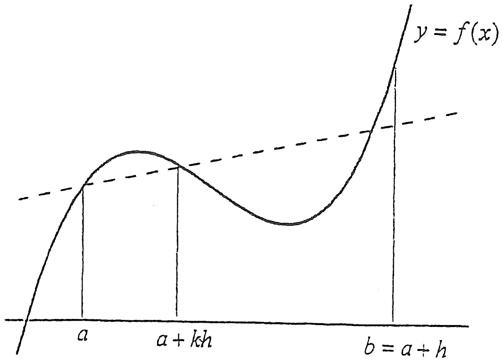
$$E_S(f) = S(f) - \int_a^{a+h} f(x)dx$$

とおくと,

$$E_S(f) = O(h^5)$$

が成り立つ (参考文献を参照)。

3. 誤差が $O(h^3)$ となる2点および3点近似積分公式



任意の $k \in [0,1]$ に対し，3点

$(a, f(a))$

$(a+kh, f(a+kh))$

$(b, f(b) = (a+h, f(a+h))$

から作られる積分近似公式およびその誤差を

$\tilde{I}(f), \qquad E_{\tilde{I}}(f)$

とする。すなわち

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+kh) + rf(a+h)\Big\}$$

$$E_{\tilde{I}}(f) = \tilde{I}(f) - \int_a^{a+h} f(x)dx$$

とおく。

等式 $E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$[1] が成り立つような p, q, r の関係を調べた結果，次の定理が得られた。

定理1. 任意の $f(x) \in C^n$ $(n \geq 2)$ および任意の $k \in [0,1]$ から作られる3点近似積分公式

$$\tilde{I}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+kh) + rf(a+h)\Big\}, \quad h = b-a$$

に対し，その誤差 $E_{\tilde{I}}(f)$ が $O(h^3)$ となるとき，

$$p = \frac{1}{2}(1-2q+2qk), \qquad r = \frac{1}{2}(1-2qk)$$

が成り立つ。このとき3点近似積分公式は

$$\tilde{I}(f) = \frac{h}{2}\Big\{(1-2q+2qk)f(a) + 2qf(a+kh) + (1-2q)f(a+h)\Big\}$$

と表される。

[1] $E_{\tilde{I}}(f) \leq Ch^3$ を満たす定数 $C \geq 0$ が存在するとき，$E_{\tilde{I}}(f) = O(h^3)$ と表す

証明. Taylor の定理より，以下の式を満たす $c,\ d,\ e\ \in (a,b)$ が存在する。

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\int_a^{a+h}\left\{f(a)+f'(a)(x-a)+\tfrac{1}{2!}f''(c)(x-a)^2\right\}dx$$

$$=f(a)h+\tfrac{1}{2!}f'(a)h^2+O(h^3)$$

$$\tilde{I}(f)=h\Big\{pf(a)+qf(a+kh)+rf(a+h)\Big\}$$

$$=h\Big[pf(a)+q\Big\{f(a)+f'(a)(kh)+\tfrac{1}{2!}f''(d)(kh)^2\Big\}$$

$$+r\Big\{f(a)+f'(a)h+\tfrac{1}{2!}f''(e)h^2\Big\}\Big]$$

このとき

$$E_{\tilde{I}}(f)=\tilde{I}(f)-I(f)=(p+q+r-1)f(a)h+(qk+r-\frac{1}{2})f'(a)h^2+O(h^3)$$

だから，すべての区間 $[a,b]$，従って任意の h および任意の $f(x)\in C^n\ (n\geq 2)$ に対し

$$E_{\tilde{I}}(f)=O(h^3)$$

が成り立つためには，次の二式が成り立てばよい。

$$p+q+r=1\ ,$$

$$qk+r=\frac{1}{2}$$

これを解いて，$p,\ r$ を q，k で表すと，

$$p=\frac{1}{2}(1-2q+2qk)\ ,$$

$$r=\frac{1}{2}(1-2qk)$$

となり，定理が成り立つ。

注意　定理１において，定数　q　および　$k \in [0,1]$　は任意であったので，誤差が　h^3　以下の３点近似積分公式は無数に存在することになる。古典的な中点，台形，Simpson 公式は　q　や　k　に適当な具体的値を入れて得られる。ここでは，２点に退化せず，３点のままで，かつ誤差が　h^4　以下にはならない例を挙げる

例１．$q = k = \frac{1}{2}$　のとき　$p = r = \frac{1}{2}$　で，積分公式は次のようになる。

$$\tilde{I}(f) = \frac{h}{4}\Big\{f(a) + 2f(a + \frac{h}{2}) + f(a+h)\Big\}$$

例２．$q = \frac{1}{2},\ k = \frac{1}{3}$　のとき　$p = \frac{1}{6},\ r = \frac{1}{3}$　で，積分公式は次のようになる。

$$\tilde{I}(f) = \frac{1}{6}\Big\{f(a) + 3f(a + \frac{1}{3}) + 2f(a+h)\Big\}$$

上記の二例では，誤差の　h　の次数をこれ以上高められない。　q　や　k　の値によってはより次数の高い公式を作り出せる。

誤差の　h　の次数を出来るだけ大きくし，積分公式の精度を高めるには，　q　あるいは　k　にいかなる条件を与えたら良いかを，以下において考察する。

定理．２　k　を　$[0,1]$　内の任意定数とし，区間　$[a,b]$　上の左半閉型２点近似積分公式

$$\hat{T}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+kh)\Big\}, \quad h = b - a$$

を考える。任意の　$f \in C^n\ (n \geq 2)$　および任意の区間　$[a,b]$　に対し，その誤差が　$O(h^3)$　となるとき，　$k \neq 0$　かつ

$$p = \frac{2k-1}{2k}, \qquad q = \frac{1}{2k}$$

が成り立つ。従って誤差が　$O(h^3)$　となる一般の左半閉型２点近似積分公式は

$$\hat{T}(f) = \hat{T}_k(f) = \frac{h}{2k}\Big\{(2k-1)f(a) + f(a+kh)\Big\}, \quad k \neq 0$$

と表される。同様に，誤差が　$O(h^3)$　となる一般の右半閉型２点近似積分公式は

$$\check{T}(f) = \check{T}_k(f) = \frac{h}{2(1-k)}\Big\{f(a+kh) + (1-2k)f(a+h)\Big\}, \quad k \neq 1$$

である。

証明．定理１において，　$r = \frac{1}{2}(1-2qk) = 0$　とけば　$\hat{T}$　が，　$p = \frac{1}{2}(1-2q+2qk) = 0$　とおけば　$\check{T}$　が得られる。

例3. $\hat{T}(f)$, $\check{T}(f)$ において $k=\frac{1}{2}$ とおけば次の中点公式が得られる。

$$\hat{T}_{\frac{1}{2}}(f)=\check{T}_{\frac{1}{2}}(f)=hf(a+\frac{h}{2})$$

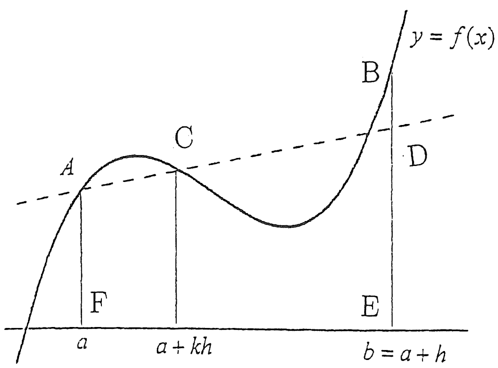
例4. $\hat{T}(f)$ において $k=1$, $\check{T}(f)$ において $k=0$ とおけば台形公式が得られる。

$$\hat{T}_1(f)=\check{T}_0(f)=\frac{h}{2}\{f(a)+f(a+h)\}$$

例5. $\hat{T}(f)$ において $k=\frac{1}{3}$, $\check{T}(f)$ において $k=\frac{2}{3}$ とおけば，下のような誤差が $O(h^3)$ となる新しい台形公式が得られる。

$$\hat{T}_{\frac{1}{3}}(f)=\frac{h}{2}\{-f(a)+3f(a+\frac{h}{3})\}$$
$$\check{T}_{\frac{2}{3}}(f)=\tfrac{h}{2}\{3f(a+\tfrac{2h}{3})-f(a+h)\}$$

注意.



左図の２点

$A(a,f(a)$, $C(a+kh,f(a+kh))$

を結ぶ直線の方程式は

$$y=f(a)+\tfrac{f(a+kh)-f(a)}{kh}(x-a)$$

である。

AC と BE の交点 D の y 座標を求めると， $x=a+h$ であるから，

$$y=f(a)+f(a)+\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}(a+h-a)=(1-\frac{1}{k})f(a)+\frac{1}{k}f(a+kh)$$

となり，

$$\text{台形 ADEF の面積} =\tfrac{(AF+DE)\times FE}{2}$$

$$=\tfrac{h}{2}\Big\{f(a)+(1-\tfrac{1}{k})f(x)+\tfrac{1}{k}f(a+kh)\Big\}$$

$$=\tfrac{h}{2k}\Big\{(2k-1)f(a)+f(a+kh)\Big\}=\hat{T}_k(f)$$

から，線分 AC を D まで延長して作った台形 ADEF の面積と $\hat{T}_k(f)$ とが一致することが分かる。$\check{T}_k(f)$ に関しても同様である。

以上より，積分公式 $\hat{T}_k(f)$ および $\check{T}_k(f)$ を **半閉型一般台形公式** と呼ぶことにする。

愛知工業大学研究報告, 第34号A, 平成11年, Vol. 34-A, Mar. 1999

3. 誤差が $O(h^4)$ となる一般3点近似積分公式

定理 3. k を $[0,1]$ 内の任意定数とし，区間 $[a,b]$ 上の閉3点近似積分公式を

$$\tilde{S}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+kh) + rf(a+h)\Big\}$$

とおく。 任意の $f \in C^n$ $(n \geq 3)$ および任意の区間 $[a,b]$ に対し， $E_{\tilde{S}}(f) = O(h^4)$ が成り立つためには， $k \neq 0$, 1 で，かつ

$$p = \frac{3k-1}{6k}, \quad q = \frac{1}{6k(1-k)}, \quad r = \frac{2-3k}{6(1-k)}$$

でなければならない。従って誤差が $O(h^4)$ となる一般の閉3点近似積分公式は

$$\tilde{S}(f) = \frac{h}{6k(1-k)}\Big\{(1-k)(3k-1)f(a) + f(a+kh) + k(2-3k)f(a+h)\Big\}$$

で与えられる。

証明. Taylor の定理より，以下の式を満たす $\xi, \eta\ \zeta \in (0,1)$，が存在する。

$$I(f) = \textstyle\int_a^{a+h} dx = \int_a^{a+h}\{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(\xi)(x-a)^3}{3!}\}dx$$

$$= f(a)h + \tfrac{1}{2!}f'(h^2) + \tfrac{1}{3!}f''(a)h^3 + O(h^4)$$

$$\tilde{S}(f) = h\{pf(a) + q(f(a+kh) + rf(a+h)\}$$

$$= h\Big[pf(a) + q\Big\{f(a) + f'(a)(kh) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(kh)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(\eta)(kh)^3\Big\}$$

$$+r\Big\{f(a) + f'(a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(\zeta)h^3\Big\}\Big]$$

このとき，

$$E_{\tilde{S}}(f) = \tilde{S}(f) - I(f)$$

$$= (p+q+r-1)f(a)h + (kq + r - \tfrac{1}{2})f'(a)h^2$$

$$+\{\tfrac{1}{2}(qk^2 + r) - \tfrac{1}{3!}\}f''(a)h^3 + O(h^4)$$

従って，$E_{\tilde{S}}(f) = O(h^4)$ となるためには，

$$p+q+r=1, \quad qk+r=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}(qk^2+r)=\frac{1}{3!}$$

が成り立たなければならない。このとき $k \neq 0,1$ で，p，q，r を k で表すと，

$$p=\frac{(3k-1)}{6k}, \qquad q=\frac{1}{6k(1-k)}, \qquad \frac{2-3k}{6(1-k)}$$

となる。これらを $\tilde{S}(f)$ に代入すると，

$$\tilde{S}(f)=\frac{h}{6k(1-k)}\Big\{(1-k)(3k-1)f(a)+f(a+kh)+k(2-3k)f(a+h)\Big\}$$

となり，定理３が証明された。

定理３の $\tilde{S}(f)=\tilde{S}_k(f)$ の式で，$k \in [0,1]$ は任意であったから，誤差が $O(h^4)$ となる閉型３点近似積分公式は無数に存在することが証明され，またその一般形も得られたことになる。２点に退化せず，３点のままの具体例として，次のものを挙げる。

例 6. $k=\frac{1}{4}$ とおけば，文献にない，誤差が $O(h^4)$ の新３点近似公式が得られる。

$$\tilde{S}(f)=\tilde{S}_{\frac{1}{4}}(f)=\frac{h}{18}\Big\{-3f(a)+16f(a+\frac{h}{4})+5f(a+h)\Big\}$$

例 7. $k=\frac{1}{2}$ とおき得られる公式は，古典的 Simpson 公式 $S(f)$ と一致する。

$$\tilde{S}(f)=\tilde{S}_{\frac{1}{2}}(f)=\frac{h}{6}\Big\{f(a)+4f(a+\frac{h}{2})+f(a+h)\Big\}=S(f)$$

定理３では，近似する関数は一切表面に出てこない。次のような定理３の幾何学的意味付けが，たとえば Newton の補間法などを用いて，容易に可能である。

定理 4. 定理３で得られた一般３点近似積分公式

$$\tilde{S}(f)=\frac{h}{6k(1-k)}\Big\{(1-k)(3k-1)f(a)+f(a+kh)+k(2-3k)f(a+h)\Big\}$$

は，曲線 $y=f(x)$ を ３点 $(a,f(a))$，$(a+kh,f(a+kh)$，$(a+h,f(a+h))$ を通る２次曲線で近似し，区間 $[a,b]$ 上で積分したのもと一致する。

4. 誤差が $O(h^4)$ となる新台形公式

本節で，最良の半閉型台形公式を決定したい。

定理 5. k を $[0,1]$ 内の任意の定数とし，区間 $[a,b]$ 上の２点近似積分公式

$$\hat{T}(f)=h\Big\{pf(a)+qf(a+kh)\Big\}$$

を考える。任意の $f\in C^n$ $(n\geq 3)$ および任意の区間 $[a,b]$ に対し，その誤差が $O(h^4)$ となるとき，

$$k=\frac{2}{3},\qquad p=\frac{1}{4},\qquad q=\frac{3}{4}$$

である。よって，誤差が $O(h^4)$ となる左半閉型２点近似積分公式は

$$\hat{T}(f)=\hat{T}_{\frac{2}{3}}(f)=\frac{h}{4}\Big\{f(a)+3f(a+\frac{2}{3}h)\Big\}$$

に限られる。同様に，誤差が $O(h^4)$ となる右半閉型２点近似積分公式は

$$\check{T}(f)=\check{T}_{\frac{1}{3}}(f)=\frac{h}{4}\Big\{3f(a+\frac{h}{3})+f(a+h)\Big\}$$

に限られる。

証明. 定理３の $\tilde{S}(f)$ で，$k=\frac{2}{3}$ または $\frac{1}{3}$ を代入すれば定理５が得られる。

注意. 古典的台形公式の誤差は $O(h^3)$ で，Simpson 公式の誤差は $O(h^5)$ である。定理３，５により，３乗と５乗のギャップを埋め，誤差が $O(h^4)$ となる二つの新台形公式と，無数の３点近似積分公式の存在を示すことが出来た。

注意. 定理５で得られた二つの新台形公式

$$\hat{T}_{\frac{2}{3}}(f)=\frac{h}{4}\Big\{f(a)+3f(a+\frac{2}{3}h)\Big\}$$

$$\check{T}_{\frac{1}{3}}(f)=\frac{h}{4}\Big\{3f(a+\frac{1}{3}h)+f(a+h)\Big\}$$

に対し，

$$\bar{S}(f)=\frac{\hat{T}_{\frac{2}{3}}(f)+\check{T}_{\frac{1}{3}}(f)}{2}$$

とおくと，

$$\bar{S}(f)=\frac{h}{8}\Big\{f(a)+3f(a+\frac{1}{3}h)+3f(a+\frac{2}{3}h)+f(a+h)\Big\}$$

となり，代表的な４点近似積分公式である $\frac{3}{8}$ Simpson 公式が得られる。

$\frac{3}{8}$ Simpson 公式は，$f(x)$ を４点を通る３次曲線で近似し積分して導かれるが，上の方法によると，近似という作業を一切省いて，簡単に $\frac{3}{8}$ Simpson 公式を導くことが出来る。

5. Simpson 公式の最良性

次の定理により，無数にある閉型３点近似積分公式の中で，特に Simpson 公式を採用することの妥当性が，証明されたことになる。

定理6.　３点近似積分公式

$$\tilde{S}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+kh) + rf(a+h)\Big\}$$

に関して，任意の $f \in C^n$ $(n \geq 4)$ および任意の区間 $[a,b]$ に対し，$E_{\tilde{S}}(f) = O(h^5)$ が成り立つとき，

$$k = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{6}$$

である。　このとき，

$$\tilde{S}(f) = \frac{h}{6}\Big\{f(a) + 4f(a+\frac{h}{2}) + f(a+h)\Big\}$$

となり，これは Simpaon 公式 $S(f)$ と一致する。従って誤差が $O(h^5)$ となる閉型３点近似積分公式は，Simpson 公式に限られる。

証明.　Taylor の定理より，次式を満たす $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ \in (a,b)$ が存在する。

$$I(f) = \textstyle\int_a^{a+h} f(x)dx$$

$$= \textstyle\int_a^{a+h} \Big\{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\alpha)(x-a)^4\Big\}dx$$

$$= f(a)h + \tfrac{1}{2}f'(a)h^2 + \tfrac{1}{3!}f''(a)h^3 + \tfrac{1}{4!}f'''(a)h^4 + O(h^5)$$

$$\tilde{S}(f) = h\Big\{pf(a) + qf(a+kh) + rf(a+h)\Big\}$$

$$= h\Big[pf(a) + q\Big\{f(a) + f''(a)kh + \tfrac{1}{2!}f''(a)(kh)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)(kh)^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(\beta)(kh)^4\Big\}$$

$$+r\Big\{f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2!}f''(a)h^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(a)h^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(\gamma)h^4\Big\}\Big]$$

$$= (p+q+r)f(a)h + (qk+r)f'(a)h^2 + \tfrac{1}{2!}(qk^2+r)f''(a)h^3$$

$$+\tfrac{1}{3!}(qk^3+r)f'''(a)h^4 + O(h^5)$$

このとき

$$E_{\tilde{S}}(f) = \tilde{S}(f) - I(f)$$

$$= (p+q+r-1)f(a)h + (qk+r-\tfrac{1}{2})f'(a)h^2 + \left\{\tfrac{1}{2}(qk^2+r) - \tfrac{1}{3!}f''(a)h^3\right\}$$

$$+\left\{\tfrac{1}{3!}(qk^3+r) - \tfrac{1}{4!}\right\}f'''(a)h^4 + O(h^5)$$

従って, $E_{\tilde{S}}(f) = O(h^5)$ が成り立つとき,

$$p+q+r=1, \quad qk+r=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}(qk^2+r)=\frac{1}{3!}, \quad \frac{1}{3!}(qk^3+r)=\frac{1}{4!}$$

が成り立つ。 はじめの三式より, $k \neq 0,\ 1$ かつ

$$p=\frac{3k-1}{6k)}, \quad q=\frac{1}{6k(1-k)}, \quad r=\frac{2-3k}{6(1-k)}$$

となり, これらを第4番目の式に代入すると,

$$2k^2-3k+1=(k-1)(2k-1)=0$$

条件 $0<k<1$ より, $k=\frac{1}{2}$, 従って $p=r=\frac{1}{6}$, $q=\frac{2}{3}$ となり, 定理が証明された。

参考文献

[1] 稲山久也, 樋口功, 被積分関数の滑らかさによる数値積分公式の誤差の評価について, 愛知工業大学研究報告, 33 号 A, 1998.

[2] 篠崎壽夫, 松下祐輔, 応用数学計算法入門 (上), (下), コロナ社, 1971.

[3] 杉浦洋, 入門数値計算, サイエンス社, 1997.

[4] 高田勝, 機械計算法, 養賢堂, 1994.

[5] 樋口功, シンプソン公式と同等の精度を持つ新台形公式について, 愛知工業大学研究報告, 34 号 A, 1999.

[6] 山本哲朗, 数値解析入門, サイエンス社, 1995.

[7] F.B.Hidebrand, Introduction to numerical analysis, MacGraw-Hill, 1974.

[8] A.Ralston and P.Rabinowitz, A first course in numerical analysis, MacGraw-Hill, 1986.

[9] J.Stoer and R.Bulirsch, Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, 1996.

(受理 平成11年3月20日)