愛知工業大学研究報告
第３４号Ａ　平成11年

ＷＩＭの構築アルゴリズムにおける発育学的検証

― 第2報　ラグランジュ補間との比較論議 ―

A Verification of Constructive Algorithm of Wavelet Interpolation Method in Growth Study

- Comparison with Lagrange interpolation in biological meaning -

藤　井　勝　紀
Katsunori　Fujii

ABSTRACT　It has been already verified that the WIM (Wavelet Interpolation Method) is possible to just draw polynomial F(x). However, the WIM has not been compared with lagrange interpolation (polynomial) in meaning of growth and development study. This paper is tried to verify the constructive algorithm of the WIM by comparison between wavelet and lagrange interpolation in biological meaning. The algorithm of lagrange interpolation is mathematically explained and applied to the longitudinal growth data from 6 to 17 in height of three boys. The first derivative curves derived by lagrange and wavelet interpolations which were applied to the growth data are compared between the both interpolations. The advantages of the WIM are derived from the discussion in regard to the comparison.

緒　言

ウェーブレット解析を発育・発達学（成長学：Auxology）に導入し、発育現象解明へのアプローチはすでに藤井[1)2)3)4)5)6)]によって試みられ、いくつかの新知見を報告している。しかし、ウェーブレット解析の特徴上、先の報告でも述べたように、フーリエ解析の発展として、周波数解析における特異点の検出に優れているが、データ数の少ない補間近似の場合に有効であるかどうかは議論の余地があろう。つまり、発育プロセスにおける観測データ数そのものに限界があること、真の発育曲線が不明であるため、その有効性を判断する基準の導出が難しく、生物学的意味におけるウェーブレット解析（ウェーブレット補間法：ＷＩＭ）の有効性を示すにはまだ論議の余地があるということである。もちろん、藤井のこれまでの報告[5)6)7)8)]によってかなりの部分までのＷＩＭの有効性は検証されている。例えば、ロジスティック関数との比較、スプライン補間との比較、フーリエ補間との比較論議において、ウェーブレット補間法としての生物学的意味における有効性を検証した。これら一連の報告[5)6)7)8)]により、発育発達学におけるＷＩＭの有効性は十分認識されると考えられよう。

しかしながら、ここで敢えてＷＩＭの生物学的意味における有効性に関して議論の余地を指摘したことは、補間公式としては一般的によく使われている(n-1)次多項式、つまりラグランジュ(Lagrange)補間公式との比較論議については触れていなかったからである。この理由は、藤井と山本[5)]がすでに多項式をＷＩＭによってかなりの近似の精度で記述することが可能であることを証明した点。そして、もう一つはスプライン補間の数学的有効性として、ラグランジュ補間の欠点である端点付近で元の関数か

ら大きくスケールアウトするルンゲ（Runge)の現象を抑えて、滑らかに補間できるという有効性が指摘され、この二つの理由によりラグランジュ補間については触れなかった。確かに、Joossens and Brems Heyns[9]の報告からも好ましい結果は示唆されておらず、Hauspie[10]も多項式の発育曲線適用に関しては、whipping（鞭打ち）現象を指摘しており、その実用性において疑問を投げかけている。

しかし、従来までの発育曲線記述のための数学的関数について、全般的に言えることは、真の発育曲線が不明である以上、当てはめる関数の精度および有効性についての論議は妥当性を導くことは難しい。したがって、このような点を考慮することにより、補間公式間での比較論議を先の報告[11]に続いて多項式（ラグランジュ補間）との間で試みるものである。

当てはめ(fitting)と補間(interpolation)

この両概念は数学的には明らかに異なった使い方がされる。例えば、「ある関数を補間公式によって当てはめる（fittingする）」と表現するように、元の関数が分かっている場合には両概念の使い方が区別されている。しかし、元の関数または曲線が分からない場合、「その不明な曲線を近似的に当てはめる（fittingする）、または近似的に補間する。」と表現するように、同意語的に扱われる場合がある。したがって、この両概念について発育発達学上の意味を明確にしておく必要があろう。

そこで、当てはめ（fitting）とは発育プロセスにおいて、時間的変異につれて観測されたデータ点をプロットした曲線に対して、その概観に類似した曲線を構成することである。従来からその類似曲線の構成関数として、ロジスティック関数やゴンペルツ関数が良く知られている。

次に、補間（interpolation）とは観測されたデータとデータの間を滑らかに繋ぐ（補間する）ことにより、データをプロットした発育曲線を近似的に描くことである。このような数学的補間公式としてスプライン関数が良く知られている。

このように、当てはめ（fitting）と補間（interpolation）を発育発達学上において概念規定すると、大別すれば、Hauspie[10]の示す Structural model（概念構成モデル）とNonstructural model（概念構成のないモデル）に分類できるのではないだろうか。つまり、Structural modelには当てはめ（fitting）の概念が、Nonstructural modelには補間（interpolation）の概念が適用できよう。

以上のように、発育発達学上において、両概念を区別してみると、当てはめ（fitting）の概念においては関数の精度の議論がそのまま関数の有効性に繋栄されるが、補間（interpolation）の概念では関数の精度が議論できない問題がある。つまり、fitting関数では観測データ点を通過するように構成されていないので、観測データ点との誤差を判定すれば精度は議論できるが、補間関数ではもともと観測データ点を通過するように構成されているので、その点については議論が不可能である。しかも前項で指摘したように、真の発育曲線は不明であるから、判断するための基準がない。そこで、藤井[7)11]はこのような問題点に対して、観測データにおける年間発育量を唯一真の観測値として補間関数の微分値、つまり速度曲線とその観測値との誤差を比較の議論と考えた。これによって補間関数の精度の論議を成立させたわけである。

このように考えると、fitting関数と補間関数の精度を議論した場合、当然、補間関数の精度が高いことになろう。しかし、ここで両概念における関数の生物学的意味における有効性を求めようとする場合、精度上の議論だけで判断できるのであろうか。つまり、それは必ずしも観測データ点を通過しなくとも善とする考え方があるからで、例えば、発育評価の基準を導くための標準発育曲線を記述するような目的の場合であれば、観測データ点の通過の必要性は考えなくとも良いであろう。しかし、発育曲線そのものを解析しようとすれば、観測データを忠実に反映する必要がある。

このように、解析目的により有効性の捉え方が異なる観があるが、いずれにせよ発育現象を解明しようとすれば、如何なる解析目的にせよ、曲線近似の程度が高い関数系を選択すべきであろう。したがって、不明な曲線を近似しようとする場合、少なくとも観測データ点を通過するように構成することは、精度の議論における重要な必要条件と考えられる。そこで、ここでは補間の立場において、重要な条件を備えているＷＩＭと多項式（ラグランジュ補間公式：Lagrange）の生物学的意味における精度を論議しようとするものである。

ラグランジュ（Lagrange）補間

今、x軸上にあるn個の標本点、$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$が与えられているとする。$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$は相異なる点であることはいうまでもない。このとき、これらの標本点を繋いだ、ある g（x）と言う関数を想定すれば、その g（x）に一致するようなn－1次の多項式 $f_n(x)$ を1つ定めることができる。

先ず、多項式の一般式を以下に示すと

(1-1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \cdots\cdots a_{n-1} x^{n-1}$

(1-1)を変形すると以下の式に変形できる。

(1-2) $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(n-i)}$

上式のようになり、この式を実際に与えられた発育データに適用する。上式によって導かれた曲線は発育現量値曲線として扱われる。そして、上式を微分することにより得られた曲線は速度曲線となる。(1-2)式を微分すると以下のようになる。

(1-3) $f'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\, a_i{}^{(n-i-1)}$

(1-2) (1-3) の両式を使って発育曲線の記述を試みる。

ラグランジュ補間の手続きは以下の通りである。

1. 測定データ $\{(t_i, y_i) : i = 1, 2, \cdots, 12\}$ を得る。ここでは、t_iは年齢、y_iは身長の発育現量値とする。
2. 12の未知数を持つ連立一次方程式を構成する。
$$y_{(t)} = a_{11} t^{11} + a_{10} t^{10} + a_9 t^9 + a_8 t^8 \cdots\cdots\cdots\cdots + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a\,t + a_0$$
3. 2. 式に実際の観測値（身長の発育現量値）$y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots, y_{11}, y_{12}$を当てはめて方程式を解く。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^{11}{}_1 & \cdots & t^0{}_1 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ t^{11}{}_{12} & \cdots & t^0{}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_0 \end{bmatrix}$$

4. 求められた係数$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{11}$を 2. 式に代入して、適当な年齢間隔で計算し、コンピューターシミュレーションする。
5. 発育速度曲線を導くために、2. 式を微分すると以下の式になる。
$$y'_{(t)} = 11 a_{11} t^{10} + 10 a_{10} t^9 + \cdots\cdots 2 a_2 t + a$$
6. 5. 式に求められた係数$a_1, a_2, \cdots\cdots a_{11}$を代入して 4. と同様にコンピューターシミュレーションする。

以上の手続きにしたがって、身長の発育データを当てはめた。

ラグランジュ補間による成長曲線の記述

今、三セットの男子身長の発育データ（低、中、高身長）がある。（Table 1 参照）
年間発育量は1年ごとの発育現量値の差分として算出してあり、上段から詰めてある。

以上、三セットの身長のデータに対して、ラグランジュ補間を適用した。その結果、算出された補間公式から発育現量値と微分値（速度量）をコンピューターでグラフ化した。その結果は Fig 1～3 に示した。Fig 1-1、Fig 2-1、Fig 3-1 はラグランジュ補間によって描かれた発育現量値および速度曲線の近似曲線である。

ラグランジュ補間によって描かれたグラフ（Fig 1、Fig 2-1、Fig 3-1）を見るかぎり、発育曲線として実用の可能性は疑問と言えるであろう。現量値曲線で云えば、観測データ点は通過するものの、両端における振動の影響が、両端から2年程度まで進行しており、発育曲線記述における実用性に関して、かなりの問題を提起している。

Table.1 各身長者における発育現量値及び年間発育量のデータ

年齢(才)	低身長		中身長		高身長	
	発育現量値 (cm)	年間発育量 (cm/yr)	発育現量値 (cm)	年間発育量 (cm/yr)	発育現量値 (cm)	年間発育量 (cm/yr)
6	109.7	5.4	118	6.1	122.2	6
7	115.1	6.3	124.1	6.2	128.2	5.9
8	121.4	5.1	130.3	4.4	134.1	5.2
9	126.5	4.7	134.7	3.5	139.3	3.4
10	131.2	7.3	138.2	5.5	142.7	5.1
11	138.5	10	143.7	6.6	147.8	6.2
12	148.5	3.7	150.3	9.5	154	8.3
13	152.2	0.9	159.8	7.2	162.3	10
14	153.1	0.6	167	4.2	172.3	5
15	153.7	0	171.2	1.3	177.3	2.7
16	153.7	0.3	172.5	0.1	180	1.5
17	154		172.6		181.5	

Fig.1-1 多項式による補間における発育現量値曲線及び速度曲線
低身長

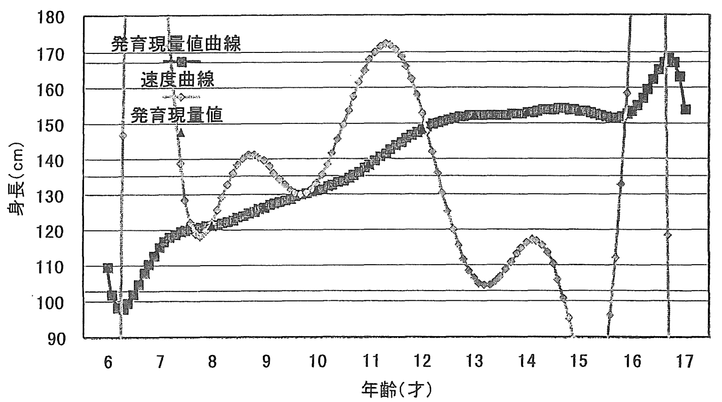
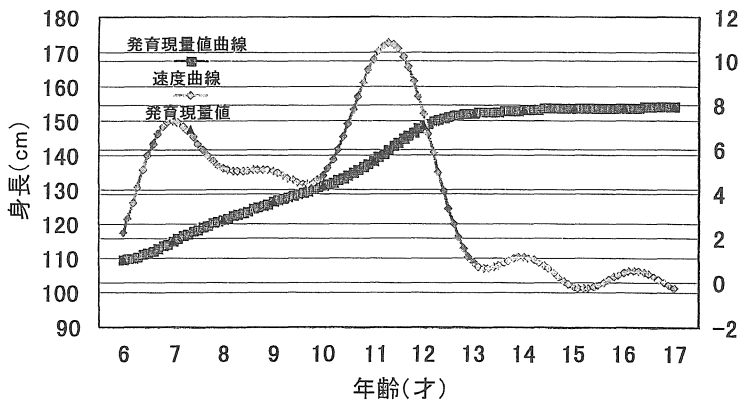


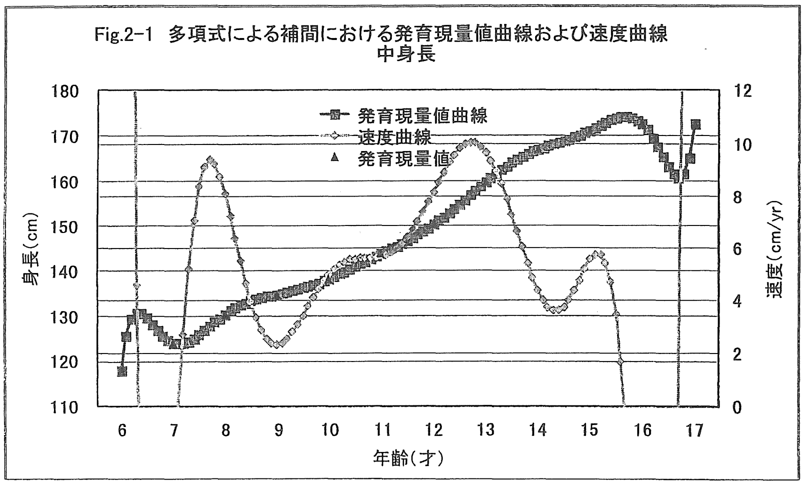
Fig.1-2 WIMにおける発育現量値曲線及び速度曲線
低身長

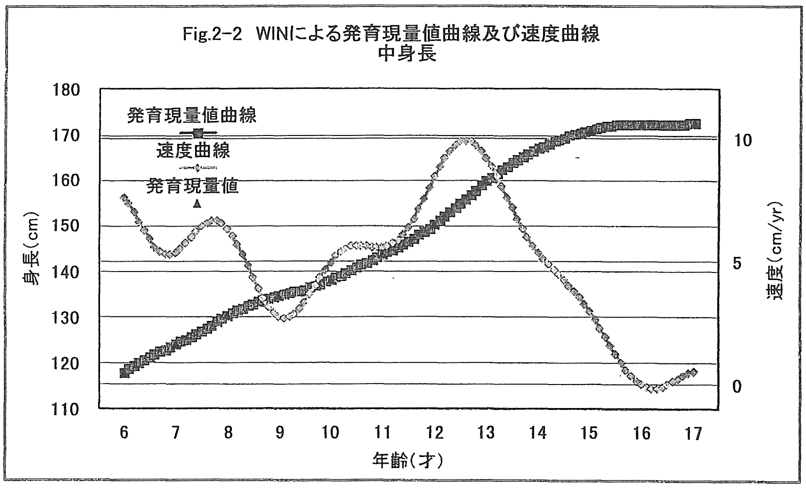


このような両端における振動現象はルンゲ(Runge)の現象と言い、数学的には多項式の次数が多くなれば多くなるほど、この現象は顕著になることが知られている。特に、微分曲線（速度曲線）の両端の振動はひどく、両端から３、４年まで進行しているようである。このように肉眼から判断しても発育曲線記述にはかなりの問題点が指摘されると考えられる。

成長曲線記述に対するラグランジュ補間とウェーブレット補間の比較論議

もともとラグランジュ補間は、次数が高くなると補間の精度が悪くなることが数学的に認められており、その欠点を克服する意味からスプライン補間が提唱されたわけである。しかし、スプライン補間は区分多項式であり、区分内では通常３次多項式を適用しているため、一次導関数は２次関数、二次導関数に至っては１次関数となり、発育曲線の記述に対して適用された場合、微分が実用化されない欠点を持つことになる。したがって、発育現量値曲線の記述だけならその有効性は認められるが、それだけでは発育曲線から生物学的パラメーターが導かれない。つまり、ロジスティック系関数のように観測データ点は通過しないが、当てはめた元の関数から生物学的パラメーターを読み取ることができるが、スプライン補間はただ記述するだけという意味になる。

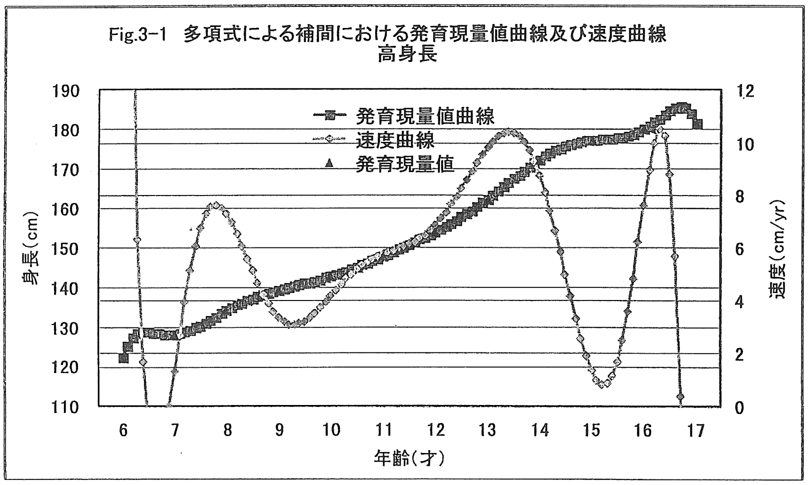




ここで、生物学的パラメーターとは思春期のピーク年齢に代表されるように、実は、発育速度曲線から導かれるパラメーターが大半である。このように考えると、発育現量値曲線を忠実に記述でき、さらに微分が可能であれば正確な速度曲線が導かれ、生物学的パラメーターも特定できるわけである。

ラグランジュ補間は両端におけるルンゲ現象の欠点を除けば、微分の自由度があり、発育曲線記述に対して実用化の可能性は考えられる。しかし、この欠点はラグランジュ補間の有する本質的な欠点でもあり、この欠点の克服は不可能に近いといえる。例えば、観測データの両端にダミー変数を設定し、それに対してラグランジュ補間を適用した場合、次数を高くする必要があり、補間状態は極めて劣悪な結果になる。また、次数を低くして適用しようとする場合は、最小二乗近似多項式として適用できる。しかし、この場合は観測データ点を通過するように構成されてはいないので、当てはめの精度の議論が必要となり、ここでのＷＩＭとラグランジュ補間との比較論議には適さなくなる。

したがって、ラグランジュ補間の欠点を克服できる方法はウェーブレット補間法ということになろう。そこで、両補間法の客観的な比較を考えることにする。先の報告[11)]において、客観的な比較の理論的根拠はすでに示してあるので、ここでは新たにＷＩＭとラグランジュ補間の比較に関する手続きを示す。



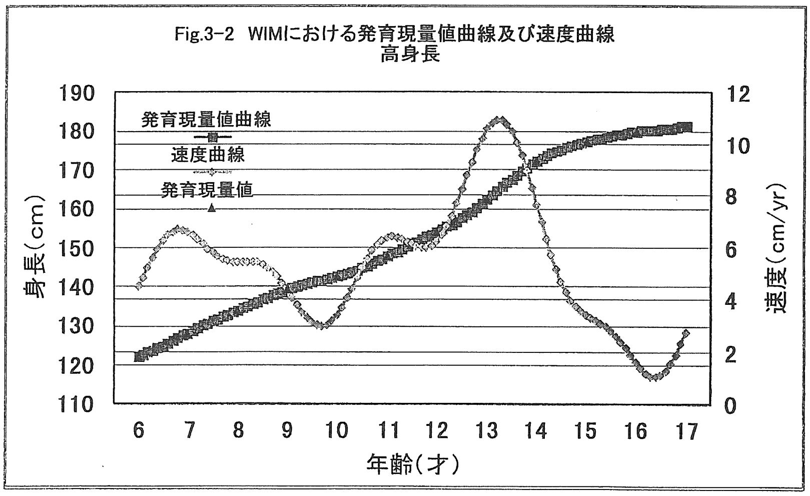


Table.2-1　生のデータと各補間法における年間発育量の比較(低身長者)

年齢	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	2乗値
生のデータ	5.4	6.3	5.1	4.7	7.3	10.0	3.7	0.9	0.6	0.0	0.3		285.19
多項式	−1.35	7.09	4.96	4.75	7.03	10.10	4.06	0.83	0.84	−0.76	6.39		310.19
WIM	5.14	6.40	5.11	4.71	7.04	10.11	4.04	0.89	0.67	−0.03	0.33		285.27

Table.2-2　生のデータと各補間法における年間発育量の比較(中身長者)

年齢	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	2乗値
生のデータ	6.1	6.2	4.4	3.5	5.5	6.6	9.5	7.2	4.2	1.3	0.1		342.50
多項式	11.68	5.57	4.69	3.37	5.46	6.48	9.42	7.46	4.15	2.09	−4.94		463.17
WIM	6.21	6.15	4.58	3.39	5.47	6.46	9.45	7.39	4.32	1.45	0.07		345.34

Table.2-3　生のデータと各補間法における年間発育量の比較(高身長者)

年齢	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	2乗値
生のデータ	6.0	5.9	5.2	3.4	5.1	6.2	8.3	10.0	5.0	2.7	1.5		377.29
多項式	8.12	5.59	5.40	3.36	5.02	6.15	8.15	10.05	5.37	2.40	3.50		414.88
WIM	5.89	5.96	5.25	3.45	4.95	6.21	8.08	10.14	5.22	2.79	1.45		377.99

1. ラグランジュ補間、ウェーブレット補間で、元の発育現量値の近似曲線を微分された数値を1歳の 1/10 刻みで算出する。
2. 両補間において、算出された数値の1年間分の平均と標準偏差を算出する。（1歳を10等分にしてあるから、1/10 刻みにおける数値を10等分について平均し、さらに、標準偏差も算出する。
3. 2.で求めた平均値について、実際に観測された年間発育量の数値と比較する。（Table 2）
4. さらに、2.で求めた平均値をすべてについて2乗し、その和をもとめる。その求められた2乗の和をラグランジュ補間とＷＩＭで比較する。

以上の手続きで導かれた結果が Table 2 に示された。低、中、高身長者の３つのデータ共、ラグランジュ補間によって算出された数値の両端から３年までと、生のデータの年間発育量とは大きな差が示されている。この結果とは対象的に、ＷＩＭでは生のデータの年間発育量との差がほとんど示されていない。ただ、思春期ピーク年齢（ＭＰＶ年齢）前後では、両補間ともそれほど生のデータの年間発育量との差は示されていない。しかし、発育プロセス全般について検討すれば、Table 2 に示されているように、年間発育量の２乗値から判断すれば、ＷＩＭは明らかに生の年間発育量の２乗値に近似しているが、ラグランジュ補間では差が明確に示されている。

以上のことから、ラグランジュ補間、ＷＩＭの比較は、肉眼で判断されたように、発育発達学的な意味においてＷＩＭの実用的な有効性が示されたといえよう。

総　括

これまで、ラグランジュ補間とＷＩＭを生物学的意味において比較した経緯はない。それはラグランジュ補間の欠点を数学的に説明することで充分と考えられてきたが、ＷＩＭとして発育曲線に適用する立場から考えた場合、補間の意味が発育学的意味を備えているものか、その点の論議はなされなかった。今回の論議は、多項式を発育曲線に適用するという形でのラグランジュ補間で実際の発育データを補間することで、ＷＩＭとの比較を検討した。その結果、明らかにラグランジュ補間の発育学的意味における実用性の欠如が指摘された。このことは逆にＷＩＭの発育学的意味における有効性を改めて強調する証左といえよう。

参考文献

1)藤井勝紀・川浪憲一・長谷川泰洋・山本浩：Wavelet 解析による身長発育の時系列分析，発育発達研究，22：21-28，1994.

2)藤井勝紀・山本浩：身長の成熟別発育速度曲線の解析，体力科学，44(3)：431-438，1995.

3)藤井勝紀，山本浩：Wavelet Interpolation Method による男子体重発育におけるＰＨＶの検討，発育発達研究，23：27-34，1995.

4)藤井勝紀，川浪憲一：Wavelet 補間法による男子胸囲の発育曲線から導き出される速度曲線およびＰＣＶ年齢の検討，学校保健研究，37：450-459，1995.

5)Fujii, K. and Yamamoto, Y.: Wavelet Interpolation Method for time series analysis in the growth and development study. Nagoya Journal of Health, Physical Fitness and Sports, 18 : 13-17, 1995.

6)Fujii, K. A comparative interpolation method of WIM and a cubic spline function to longitudinal height data during adolescent in boys, Nagoya Journal of Health, Physical Fitness and Sports, 19 : 9-17, 1996.

7)Fujii, K. and Kawanami, K. : An analysis in regard to relationship between age at MPV of height, and its sex difference, Japanese Journal of School Health, 40 : 317-331, 1998.

8)Fujii, K. and Matsuura, Y. : Analysis of the velocity curve for height by the Wavelet Interpolation Method in children classified by maturity rate, American Journal of Human Biology, 11 : 13-30, 1999.

9)Joossens, JV. and Brems Heyns, E.:High power polynomial regression for the study of distance, velocity and acceleration of growth, Growth, 39 : 535-551, 1975.

10)Hauspie, R. C. : Mathematical models for the study of individual growth patterns. Rev. Epidem. et Sante Publ. 37 : 461-476, 1989.

11)藤井勝紀、川浪憲一：ＷＩＭの構築アルゴリズムにおける発育学的検証 － 生物学的意味におけるフーリエ補間との比較論議 － 、愛知工業大学”研究報告” No.33 : 89-95, 1998.

（受理　平成11年３月20日）