愛知工業大学研究報告
第２７号　　平成４年

論文

定常電流の磁気的相互作用と作用反作用の法則

Magnetic Interactions of Stationary Electric Currents and the Law of Action and Reaction

鵜飼正和・岡田静雄・服部忠一朗

Masakazu UKAI, Shizuo OKADA, Chuichiro HATTORI

We discuss the characteristic features of the magnetic interaction of a stationary electric current with the other elements, regarding it as an interaction-at-a-distance. Using Stokes' theorem, we derive formulas to represent forces and moments of force interacting between closed stationary currents by means of surface integrals. These formulas lead to the generalized law of action and reaction and the wellknown equivalence between a colsed stationary current and a system of infinitesimal magnetic dipoles. The effect of the self-action of a stationary current is also discussed.

1. はじめに

Newton 力学の基礎部分は粒子の力学であり，それは，粒子が行う相互作用が遠隔作用であるとの立場で理論構成されている．その相互作用の一般的特性を表現するのが，第３法則である作用反作用の法則である．作用反作用の法則は「２つの粒子の間に働きあう力は，大きさは等しく，逆向きであり，ふたつの粒子を結ぶ直線上にある.」と定式化される．この法則は，遠隔作用論において閉じた粒子系の運動量保存の法則と角運動量保存の法則を保証する役割を持つ．

一方，Maxwell 電磁気学は電磁気的相互作用が近接作用であり，荷電粒子とともに，作用を媒介する電磁場が本質的な役割を果たすものとして構成されている．しかし，電磁場が時間的に不変な静電磁場であるときは，近接作用と遠隔作用との違いは現れないから，相互作用を媒介する電磁場を消去して，粒子間の電磁気的相互作用を遠隔作用の立場で定式化することができる．静止した電荷間の電気的相互作用と，静止した磁荷間の磁気的相互作用をそれぞれ記述する Coulomb の法則はその例であり，これら Coulomb の法則にしたがう力は作用反作用の法則を満たす．

この事実は，閉じた系の運動量保存の法則と角運動量保存の法則を基本的な物理法則とみなす立場からすれば当然のことといえる．なぜなら，場を消去して電磁気的相互作用を遠隔作用として扱うことは電磁場の持ち運ぶ運動量，角運動量を無視する近似を取ることであるから，残った閉じた粒子系での運動量，角運動量保存の法則が成り立ち，これを保証するものとして，粒子間の相互作用は作用反作用の法則を満たすことになると考えられるからである.（もちろん，たとえば荷電粒子が運動すれば，変動電磁場が形成され，遠隔作用論的な取扱いは正しくなくなる．ここでは，それを無視する近似の上での荷電粒子系の運動量，角運動量保存の法則を論じていることになる.）

しかし，静磁場と相互作用するもう一つの要素である定常電流を含めて考えたとき，作用反作用の法則について立ち入って考慮することなく，これを単純に適用することはできない事情が生まれる．真空中で定常電流がつくる静磁場は Biot-Savart の法則

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I\mathrm{d}l \times r}{r^3} \quad (1)$$

で記述される．ここで，I は電流量，C は回路を表す閉曲線，$\mathrm{d}l$ は回路 C の微小線要素，r は線要素 $\mathrm{d}l$ からの位置ベクトルであり，B はその位置につくられる磁束密度である．また，μ_0 は真空の透磁率である．Biot-Savart の法則は電流回路全体の周回積分ではじめて明確な意味を持つものであるが，その形式上，微小電流要素 $I\mathrm{d}l$ が位置 r に微小磁束密度 $\mathrm{d}B = (\mu_0/4\pi)(I\mathrm{d}l \times r/r^3)$ をつくり，その重ね合わせで磁束密度 B が形成されるというように「読む」ことができる．このため，少なくない物理学の教科書において，微小電流要素を磁気的相互作用の要素として，磁荷や，他の微小電流要素との間の磁気的相互作用に作用反作用の法則を適用して論ぜられている．

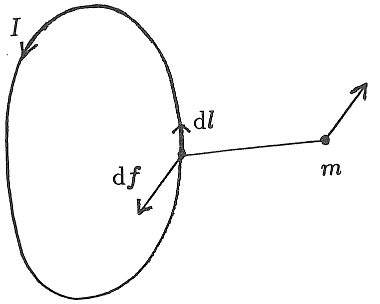

図 1

図 1 のように磁荷 m と微小電流要素 $I\mathrm{d}l$ とが及ぼしあう力が大きさが等しく逆向きであることを根拠に，微小電流要素 $I\mathrm{d}l$ が磁束密度 B の磁場から受ける力 $\mathrm{d}f$ は

$$\mathrm{d}f = I\mathrm{d}l \times B \quad (2)$$

で与えられることを導く議論がその例である．作用反作用の法則がその根拠として取り上げられているが，働きあう力が，作用しあう要素を結ぶ直線上になく，粒子間の相互作用についての作用反作用の法則を逸脱していることが無視されている．もちろん，他のいくつかの教科書は,「Biot-Savart の法則は積分形ではじめて明確な意味を持つ」点を指摘しつつ，作用反作用の法則の「正しい」適用について論じているが，しかし，その場合でも十分問題が掘り下げられず，定常電流を含む系の相互作用において，作用反作用の法則がいかなる意味を持つかは必ずしも明確とはいえない．この小論の目的は，この点を明確にし，大学における物理学教育に資することにある．

2. 作用反作用の法則について

作用反作用の法則についてよく知られていることではあるが，その意味を確認するために整理をおこなう．まず，2 つの粒子間の相互作用を考える．粒子 1 が位置 r_1 にあり，粒子 2 が位置 r_2 にあるとし，粒子 1 が粒子 2 から力 f_{12} を，粒子 2 が粒子 1 から力 f_{21} を受けるとする．このとき，作用反作用の法則は

$$f_{12} + f_{21} = 0, \quad (3)$$

$$(r_1 - r_2) \times f_{12} = 0 \quad (4)$$

なる式で表現できる．また，粒子 1 が粒子 2 から受ける力の原点に関するモーメントを n_{12} とし，粒子 2 が粒子 1 から受ける力の原点に関するモーメントを n_{21} とすると，

$$n_{12} = r_1 \times f_{12}, \quad n_{21} = r_2 \times f_{21} \quad (5)$$

である．定義から明らかに n_{12}(n_{21}) は f_{12}(f_{21}) に直交する．そして，式 (3)，(4) から

$$n_{12} + n_{21} = 0 \quad (6)$$

が導かれる．もちろん，原点の取り方は任意であり，上式は任意の点に関するモーメントについて成立する．このように作用反作用の法則は，式 (3) と式 (6) が成立すること，つまり「2 粒子に働く 2 つの力の和と，それらの力の任意の点に関するモーメントの和がいずれも 0 である」ことを主張する．

さて，次に粒子系 1 と粒子系 2 の間の相互作用について考える．粒子系 1 が粒子系 2 から受ける力の総和，力のモーメントの総和をそれぞれ F_{12}，N_{12} とし，粒子系 2 が粒子系 1 から受ける力の総和，力のモーメントの総和をそれぞれ F_{21}，N_{21} とする．構成粒子間の相互作用が作用反作用の法則を満足しているとすれば，明らかに

$$F_{12} + F_{21} = 0, \quad (7)$$

$$N_{12} + N_{21} = 0 \quad (8)$$

が成立する．これらは，2 粒子の相互作用における関係式 (3)，(6) と形式的には全く同一であり，いずれも全系が閉じている場合に運動量保存の法則と角運動量保存の法則が成立する根拠を与えて

いる．しかし，2粒子間の相互作用の場合と違ってこの場合は $\boldsymbol{N}_{12}$($\boldsymbol{N}_{21}$) は必ずしも $\boldsymbol{F}_{12}$($\boldsymbol{F}_{21}$) と直交せず，力と平行な成分を持つ．力のモーメントを力と平行な成分と垂直な成分に分解すると，それぞれが式 (8) を満たすから

$$\boldsymbol{N}_{12\parallel} + \boldsymbol{N}_{21\parallel} = 0, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{N}_{12\perp} + \boldsymbol{N}_{21\perp} = 0 \tag{10}$$

である．垂直成分 $\boldsymbol{N}_{12\perp}$($\boldsymbol{N}_{21\perp}$) に対しては，適当な位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$($\boldsymbol{r}_2$) を選んで

$$\boldsymbol{N}_{12\perp} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{12}, \quad \boldsymbol{N}_{21\perp} = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{21} \tag{11}$$

とすることができる．明らかに，位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1$ ($\boldsymbol{r}_2$) は力 $\boldsymbol{F}_{12}$($\boldsymbol{F}_{21}$) の方向成分の任意性を除いて決定され，式 (9) から式 (4) に対応する

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} = 0 \tag{12}$$

が得られる．このように，この場合には式 (8) ではなく，式 (10) が2粒子の場合の式 (6) の役割を果たす．この意味で，力とは独立に力のモーメントの平行成分 $\boldsymbol{N}_{12\parallel}$, $\boldsymbol{N}_{21\parallel}$ が存在し，それが式 (9) を満たすことが，粒子系の間の相互作用の（2粒子の間の相互作用とは違う）特徴である．

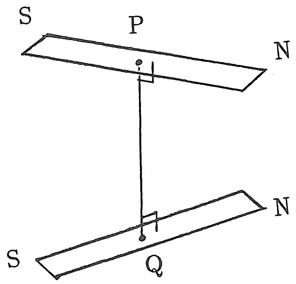

図 2

具体例をあげよう．図2のように，2つの棒磁石がそれらの中心を結ぶ線分 PQ とそれぞれ直交し，かつ，ねじれの位置にある場合の棒磁石間の相互作用を考える．明らかに互いの間に通常の作用反作用の法則にしたがう引力（または斥力）が働くとともに線分 PQ を軸とする大きさが等しく逆向きの（偶力の）モーメントを及ぼしあう．

以上の粒子系に関する事柄はよく知られていることである．それにも関わらず，以上の整理を行ったのは次のことを改めて確認するためである．つまり，一般に，2つの系は力を及ぼしあうとともにそれと独立に（偶力の）モーメントを及ぼしあう．そして，及ぼしあう力の総和と力のモーメントの総和は式 (7) と式 (8) をそれぞれ満足する．このことは，広がりを持つ粒子系に限らず，後述するように，微小磁気双極子のように無限小の要素の行う相互作用をも特徴づけるものである．粒子間の相互作用について定式化された作用反作用の法則は，及ぼしあうモーメントが，1つの力によるモーメントのみを，つまり力に垂直な成分のみを持つという制限された場合についてであるといえる．この意味で，2つの系の間の相互作用が式 (7) と式 (8) を満たすことを，一般化された作用反作用の法則と呼ぶことができる．逆に，任意の系の間の相互作用が作用反作用の法則を満たすことを示すためには，式 (7) と式 (8) のいずれもが成立することを確認することが必要である．このことは，言わずもがなのあまりにも当然のことであるが，いくつかの教科書で定常電流を含む系の相互作用についての作用反作用の法則を論ずるとき十分考慮が払われていないと思われる．

3. 定常電流のつくる磁束密度

次に定常電流のつくる磁束密度に関する Biot-Svart の法則（式 (1)）を分析する．この法則の形式から「電流要素 $Id\boldsymbol{l}$ のつくる（静磁場の）微小磁束密度 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$」という表現が慣用的に用いられる．しかし，静磁場をつくるのは定常電流回路全体であり，決して電流要素が文字どおり静磁場をつくるのではない．物理的にみると，電流要素は運動荷電粒子からなり，そのつくる場は時間的に変化する変動（電）磁場である．定常電流の場合は，そのような変動磁場の重ね合わせの結果静磁場が実現するのである．つまり，Biot-Savart の法則での「電流要素のつくる微小磁束密度」は微小電流要素のつくる変動磁場の重ね合わせの結果残る静磁場への寄与部分を意味しているに過ぎないのである．したがって，つくられているのが静磁場であるからといって，これを消去し，単純に電流要素を（遠隔作用としての）磁気的相互作用をする基本要素と見なすことは，概念上の混乱を引き起こす可能性をもつ．

以上のように，定常電流のつくる静磁場を媒介として起こる磁気的相互作用を遠隔作用の立場でその性質を論ずるときは，相互作用の基本要素

としては，定常電流回路全体を取り上げることが必要である．そして，定常電流回路は当然のことながら有限の広がりを持つ系であり，定常電流回路の行う磁気的相互作用は粒子間の作用反作用の法則ではなく，前節で述べたように一般化された作用反作用の法則にしたがうと予想される．

しかし，式 (7) と式 (8) が定常電流を含む系の場合に成立することを直接証明しようとするとき，それは必ずしも自明とは言い難い．また，式 (7) の証明を行っている教科書は多いが，式 (8) に明確に言及している教科書は見あたらない．さらに，作用反作用の法則の適用に関して，一定の混乱も存在する．したがって，教育的観点からしても，初等的な議論によって式 (7)，(8) を直接証明することの意義は大きい．以下，定常電流の行う磁気的相互作用において，一般化された意味での作用反作用の法則が成立することの直接証明を試みる．

4. 定常電流と磁荷との相互作用

定常電流回路のつくる磁束密度は Biot-Savart の法則（式 (1)）で記述される．一方，微小電流要素が磁場から受ける力は式 (2) で与えられる．これは，一般の磁場から運動する荷電粒子の受ける力を記述する Lorentz 力から導かれるもので，この場合は，Biot-Savart の法則と違って，回路にわたって積分することなく，微小電流要素のままで正しい物理法則である．

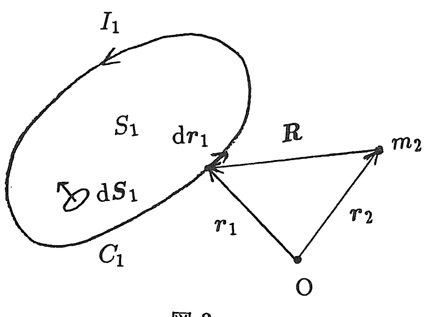

図 3

さて，図 3 のように，定常電流回路 I_1 と磁荷 m_2 が磁気的相互作用を行っている場合を考えてみよう．定常電流回路を表す閉曲線を C_1，その電流要素の位置を $\boldsymbol{r}_1$ で表し，磁荷の位置を $\boldsymbol{r}_2$ で表し，相対位置を $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ で表すものとする．磁荷 m_2 が位置 $\boldsymbol{r}_1$ につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}_{12}$ は

$$\boldsymbol{B}_{12}=\frac{1}{4\pi}\frac{m_2\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{13}$$

である．回路 C_1 の微小線要素を $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ で表すと，上式と式 (2) から，定常電流回路全体が磁荷から受ける力の総和と力のモーメントの総和はそれぞれ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{12}&=\oint_{C_1} I_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{B}_{12}\\&=\frac{I_1m_2}{4\pi}\oint_{C_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3},\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{12}&=\oint_{C_1}\boldsymbol{r}_1\times(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{B}_{12})\\&=\frac{I_1m_2}{4\pi}\oint_{C_1}\boldsymbol{r}_1\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3})\end{aligned} \tag{15}$$

である．一方，定常電流回路が磁荷の位置につくる磁束密度は，Biot-Savart の法則 (1) から

$$\boldsymbol{B}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{I_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times(-\boldsymbol{R})}{R^3} \tag{16}$$

である．したがって，磁荷が定常電流回路から受ける力と力のモーメントはそれぞれ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{21}&=m_2\{\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_{21}\}\\&=\frac{I_1m_2}{4\pi}\oint_{C_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}),\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_{21}&=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_{21}\\&=\frac{I_1m_2}{4\pi}\{\boldsymbol{r}_2\times\oint_{C_1}(I_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}))\}\end{aligned} \tag{18}$$

である．式 (14) の $\boldsymbol{F}_{12}$ と式 (17) の $\boldsymbol{F}_{21}$ が関係式 (7) を満たすことは自明である．次に，式 (15) の $\boldsymbol{N}_{12}$ と式 (18) の $\boldsymbol{N}_{21}$ が式 (8) を満たすことを示そう．付録で述べるように，Stokes の定理を利用すると，任意のテンソル場の閉曲線 C に関する周回線積分を，C を周とする任意の曲面上 S の面積分に変換する式が得られる．付録で示した関係式 (A-3)，(A-4) で，$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{R}/R^3$ と置くと，次の変換式が得られる．

$$\begin{aligned}\oint_{C_1}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}&=\int_{S_1}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\times\nabla_1)\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\\&=\int_{S_1}(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\cdot\nabla_1)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3},\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\oint_{C_1}\boldsymbol{r}_1\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3})\\&=\int_{S_1}\boldsymbol{r}_1\times\{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\times\nabla_1)\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\}+\int_{S_1}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\\&=\int_{S_1}\boldsymbol{r}_1\times\{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\cdot\nabla_1)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\}+\int_{S_1}\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\end{aligned} \tag{20}$$

$$= \int_{S_1} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{r}_1 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3})$$

ここで，∇_1 は変数 $\boldsymbol{r}_1$ に関するナブラ演算子である．また，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{n}_1 \mathrm{d}S_1$ は曲面 S_1 上の微小面要素であり，$\boldsymbol{n}_1$ は曲面の正の向きの法線ベクトルである（付録参照）．これらの式を導出する際，被積分関数が $\boldsymbol{R}/R^3 = -\nabla_1(1/R)$ であり，$1/R$ は Laplace 方程式の解であるから

$$\nabla_1 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right) = -\nabla_1 \cdot \nabla_1 \left(\frac{1}{R}\right) = 0 \qquad (21)$$

が成り立つこと，これとベクトルの 2 重外積の公式 $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を用いると

$$\begin{aligned} &(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \nabla_1) \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \\ &= \nabla_1(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) - \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1(\nabla_1 \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \\ &= -\nabla_1(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)\frac{1}{R} + \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1(\nabla_1 \cdot \nabla_1)\frac{1}{R} \qquad (22) \\ &= -(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)\nabla_1\left(\frac{1}{R}\right) \\ &= (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned}$$

となることを用いた．また，式 (20) の最後の等式を導くときには，関係 $(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{r}_1 = \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$ と関数の積の微分の公式を用いている．式 (19)，(20) を用いると，式 (15)，(18) の力のモーメントはそれぞれ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{12} &= \frac{I_1 m_2}{4\pi} \int_{S_1} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{r}_1 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}), \\ \boldsymbol{N}_{21} &= \frac{I_1 m_2}{4\pi} \int_{S_1} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{r}_2 \times (-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3})) \end{aligned} \qquad (23)$$

と表される．$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ であるから $\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{R} = -\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2$ となり，明らかに式 (8) が成立する．なお，この場合は磁荷の受けるモーメントは

$$\boldsymbol{N}_{21} = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{21} \qquad (24)$$

であるから，モーメント $\boldsymbol{N}_{21}$ と $\boldsymbol{N}_{12}$ は力と垂直であり，力と平行な成分を持たない．また，後の議論のため，式 (14)，(17) の力についても式 (19) を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{12} &= \frac{I_1 m_2}{4\pi} \int_{S_1} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}, \\ \boldsymbol{F}_{21} &= \frac{I_1 m_2}{4\pi} \int_{S_1} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \end{aligned} \qquad (25)$$

である．

5. 定常電流間の相互作用

次に図 4 のような 2 つの定常電流回路間の相互作用を取り上げる．

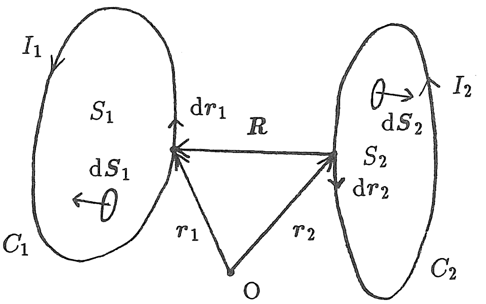

図 4

Biot-Savart の法則 (1) と式 (2) を用いると，定常電流回路 I_1 が定常電流回路 I_2 から受ける力の総和と定常電流回路 I_2 が定常電流回路 I_1 から受ける力の総和はそれぞれ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{12} &= \oint_{C_1} I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{B}_{12} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}), \\ \boldsymbol{F}_{21} &= \oint_{C_2} I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}_{21} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times (-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3})) \end{aligned} \qquad (26)$$

で与えられる．これらが式 (8) を満たすことは，前と同様，Stokes の定理を使って周回線積分を面積分に変換することによって示すことができる．変換式 (19) を 2 度用いることによって

$$\begin{aligned} &\oint_{C_1} \oint_{C_2} \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \\ &= \int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \nabla_1) \times \{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \times \nabla_2) \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\} \qquad (27) \\ &= \int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \end{aligned}$$

が得られ，これから式 (26) は

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \qquad (28)$$

となる．同様にして

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2)(-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \qquad (29)$$

となり，2 つの力が式 (7) を満足することは明かである．この結果そのものは，議論のスタイルは異なるが多くの教科書が論じており，新しいこと

ではない．しかし，さらに定常電流回路が受ける力のモーメントの総和について式 (8) が成立することを示してはじめて，定常電流回路系の相互作用が（一般化された）作用反作用の法則を満たすことを確認することができるが，この点にふれた教科書は見あたらない．式 (7) を示すのみで作用反作用の法則が成立していることが確認されていると結論づけている．これは，今までの議論から明らかなように，正しいとは言えない．我々は，ここで式 (8)，つまり「力のモーメントの総和 = 0」が成立することを確かめよう．定常電流回路 1 と定常電流回路 2 が相手から受ける力のモーメントの総和はそれぞれ

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_{12} &= \oint_{C_1} \boldsymbol{r}_1 \times (I_1 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{B}_{12}) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \boldsymbol{r}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3})), \\ \boldsymbol{N}_{21} &= \oint_{C_2} \boldsymbol{r}_2 \times (I_2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{B}_{21}) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \boldsymbol{r}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times (-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}))) \end{aligned} \tag{30}$$

で与えられる．さて，この場合の式 (8) の成立を示すには，次のようにやはり Stokes の定理を用いて周回線積分を面積分に変換して，忠実に計算を行うことが必要である．変換式 (19)，(20) を適用し，式 (22) を 2 度用いると

$$\begin{aligned} &\oint_{C_1} \oint_{C_2} \boldsymbol{r}_1 \times \{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3})\} \\ =&\int_{S_1} \oint_{C_2} \boldsymbol{r}_1 \times \{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \nabla_1) \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\} \\ &\quad + \int_{S_1} \oint_{C_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \\ =&\int_{S_1} \int_{S_2} \boldsymbol{r}_1 \times \{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \nabla_1) \times ((\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \times \nabla_2) \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3})\} \\ &\quad + \int_{S_1} \int_{S_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \times \nabla_2) \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3})\} \\ =&\int_{S_1} \int_{S_2} \boldsymbol{r}_1 \times \{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2) \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\} \\ &\quad + \int_{S_1} \int_{S_2} \mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \times \{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2) \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\} \\ =&\int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2)(\boldsymbol{r}_1 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \end{aligned} \tag{31}$$

が得られる．これから

$$\boldsymbol{N}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2)(\boldsymbol{r}_1 \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \tag{32}$$

が得られ，同様にして

$$\boldsymbol{N}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{S_1} \int_{S_2} (\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2 \cdot \nabla_2)(\boldsymbol{r}_2 \times (-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3})) \tag{33}$$

となる．これらが式 (8) を満足していることは明かである．以上から，定常電流間の磁気的相互作用において，一般化された作用反作用の法則が成立することが直接に示された．

6. 定常電流回路と磁気双極子

これまでの議論で，電流要素は静磁場をつくる基本要素ではないことを強調してきた．回路全体を考える必要があることから，相互作用を行う系が広がりを持つ系であり，この結果として，一般化された作用反作用の法則を定式化しなければならなかった訳である．

この事情を別の観点から論じてみよう．よく知られているように，有限の定常電流回路は電流回路を周とする面上の無限小の定常電流回路の集団と等価である．そして，無限小定常電流回路は無限小磁気双極子と等価である．この等価性は，静磁場の源として，また，静磁場から作用を受ける対象として等価であることを意味する．したがって，無限小定常電流回路=無限小磁気双極子は，電流要素と違って，静磁場での磁気的相互作用を遠隔相互作用論的に構成する場合の，相互作用の無限小要素として物理的に正しい選択となる．

位置 $\boldsymbol{r}_2$ にある微小磁気双極子（双極子モーメント $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$）が位置 $\boldsymbol{r}_1$ につくる磁束密度は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \cdot \nabla_2) \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\} \tag{34}$$

である．(ここで，磁気双極子モーメントは $\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{B}$ 対応で定義してあり，$\boldsymbol{E}$–$\boldsymbol{H}$ 対応で定義される双極子モーメントの $1/\mu_0$ 倍に相当する．) また，任意の磁場中で，位置 $\boldsymbol{r}_1$ にある微小磁気双極子（双極子モーメント $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1$）が磁束密度 $\boldsymbol{B}_{12}$ から受ける力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$ は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = (\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla_1) \boldsymbol{B}_{12}, \tag{35}$$

である．また，微小磁気双極子のモーメント $\mathrm{d}\boldsymbol{N}_{12}$ は受ける力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$ のモーメント $\boldsymbol{r}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$ と偶力のモーメント $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{B}_{12}$ の和で与えられ

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{N}_{12} &= \boldsymbol{r}_1 \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} + \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{B}_{12} \\
&= \boldsymbol{r}_1 \times ((\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla_1)\boldsymbol{B}_{12}) + \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \times \boldsymbol{B}_{12} \\
&= (\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla_1)(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{B}_{12})
\end{aligned} \tag{36}
$$

である．

第 4 節と第 5 節で得た結果は，磁気双極子に関する式 (34)，(35)，(36) と比較すると，いずれも電流回路 C を周とする S 面上に並んだ磁気双極子モーメント $I\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ をもつ磁気双極子の集団と磁荷の間に，または磁気双極子の集団の間に働く力の総和と，力のモーメントの総和を求める積分であることがわかる．例えば，磁気双極子 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1$ が磁気双極子 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2$ から受ける力は，式 (34) と式 (35) から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} &= (\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla_1)\{\frac{\mu_0}{4\pi}(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \cdot \nabla_2)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\{(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 \cdot \nabla_1)(\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 \cdot \nabla_2)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\}
\end{aligned} \tag{37}
$$

となるが，磁気双極子モーメントを $\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 = I_1\mathrm{d}\boldsymbol{S}_1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 = I_2\mathrm{d}\boldsymbol{S}_2$ と置いて，総和を求める面積分を実行したものが，定常電流回路に働く力 $\boldsymbol{F}_{12}$（式 (28)）と一致する．つまり，これまでの計算は遠隔作用的に定式化されたときの定常電流回路と磁気双極子の集団との等価性を Stokes の定理を用いて直接確かめたものになっているわけである．

したがって，その結果は個々の磁気双極子の行う相互作用の持つ特性を反映している．上記のように，磁気双極子間の相互作用には，電荷や磁荷のような単極子間の相互作用にはない（偶力の）モーメント $\mathrm{d}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}$ が含まれ，したがって，粒子間の通常の作用反作用の法則を逸脱し，一般化された作用反作用の法則にしたがう．磁荷に分離することができないと言う意味で本質的に双極子である微小定常電流回路（の集団）の行う相互作用は，通常の作用反作用の法則の枠にはまらず，作用反作用の法則が一般化されなければならないことは当然といえよう．

7. 定常電流回路の自己作用

実はこれまでは定常電流回路の自己作用を無視して議論を進めてきた．定常電流回路は有限の大きさを持つため，回路のある部分がつくる磁場が他の部分に作用するという自己作用が存在する．閉じた系の運動量，角運動量保存の法則を基礎法則とする立場からは定常電流回路の構成部分間に働きあう力の総和および力のモーメントの総和は 0 であることは自明である．しかし，これが初等的な議論によって導かれることは自明ではなく，したがって，直接にこれを確かめ議論を自己完結的にすることが必要である．

一つの電流回路において形式的にこれまでと同様 Biot-Savart の法則 (1) を用いて自己回路に働く力の総和を求める式をつくると積分が同一曲線上の積分になるので $R \to 0$ で発散が生ずる．これは，用いた Biot-Savart の法則 (1) が線電流という近似に基づいている場合のものであるからであり，定常電流が 1 次元的ではなく空間的な広がりを持っている場合の Biot-Savart の法則を用いて同様な計算を行えば，見かけの発散は除去され求める結果が得られるはずである．

しかし，以下では，これまでのような直接計算を行わず，回路にわずかな太さを持たせたときの回路のつくる磁場とそれから受ける力の総和と力のモーメントの総和を評価することによって結論を導くこととする．

回路の自己インダクタンスを求める場合に用いられる手法にならって，太さを持たせた回路に流れる電流を流管に分けて考える．この場合電流要素は電流密度 i と体積要素 $\mathrm{d}v$ の積 $i\mathrm{d}v$ となるが，これを流管の中心付近を通る 1 つの流線にそった線要素 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と流管の垂直断面積 $\mathrm{d}\sigma$ を使って $i\mathrm{d}v = i\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ と表せば，異なった流管の間に働く力の総和と力のモーメントの総和はそれぞれの中心を通る流線にそった線積分として表される．そして，有限の小さな距離を ϵ として，相隣りあう流管の中心を通る流線間の距離が 2ϵ より小さくならないように流管への分割を有限にとどめておけば，これらの積分はすべて有限となる．i 番目の流管が $j(\neq i)$ 番目の流管から受ける力の総和，力のモーメントの総和を $\boldsymbol{F}_{ij}$，$\boldsymbol{N}_{ij}$ とすれば，第 5 節の結果から

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = 0, \\
&\boldsymbol{N}_{ij} + \boldsymbol{N}_{ji} = 0
\end{aligned} \tag{38}
$$

が成り立つ．また，i 番目の流管のつくる磁場が自身の流管に及ぼす力の総和と力のモーメントの総和を $\boldsymbol{F}_{ii}$，$\boldsymbol{N}_{ii}$ とすると，この回路に働く力の

総和 $\boldsymbol{F}$ と力のモーメントの総和 $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ii},\qquad \boldsymbol{N}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{N}_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{ii} \tag{39}$$

となる．ここで，n は流管数であり，i と j について同時に和をとるときは $i=j$ の場合は除外するものとする．この第 1 項は式 (38) により

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_{ji})=0,\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{N}_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{N}_{ij}+\boldsymbol{N}_{ji})=0 \tag{40}$$

がいえるので

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ii},\qquad \boldsymbol{N}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{ii} \tag{41}$$

ということになる．

$\boldsymbol{F}_{ii}$, $\boldsymbol{N}_{ii}$ については，これが 0 となることを直接示すのではなく，これらからの寄与の大きさ

$$|\boldsymbol{F}|=|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ii}|,\qquad |\boldsymbol{N}|=|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{ii}| \tag{42}$$

が細分割の度合いを示す尺度である ϵ に対してどのような依存性を持つかを調べ，これらが $\epsilon\to 0$ で 0 になることを示す．ベクトル量の大きさについては

$$|\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ii}|\le\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{F}_{ii}|,\qquad |\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{N}_{ii}|\le\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{N}_{ii}| \tag{43}$$

の関係がある．また $\boldsymbol{F}_{ii}$, $\boldsymbol{N}_{ii}$ は i 番目の流管内の位置 $\boldsymbol{r}$ での体積要素を $\mathrm{d}v$, 電流密度を $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ とし，i 番目の流管がつくる磁束密度を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ とすると，i 番目の流管内を積分領域とする積分によって

$$\boldsymbol{F}_{ii}=\int(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}v)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{N}_{ii}=\int\boldsymbol{r}\times\{(\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}v)\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \tag{44}$$

と表されるから

$$|\boldsymbol{F}_{ii}|\le\int\mathrm{d}v|\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})||\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})|,\qquad |\boldsymbol{N}_{ii}|\le\int\mathrm{d}v|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})||\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})| \tag{45}$$

の関係がある．さて，$|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})|$ は流管を流れる電流量が一定であるとすると，一様な定常電流が流れている円形断面を持つ細い導線内の磁束密度と同じく $1/\epsilon$ の ϵ 依存性を持つが，電流量は一定ではなく ϵ^2 に比例するので，結局 ϵ^1 なる ϵ 依存性を持つ．$|\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})|$ や $|\boldsymbol{r}|$ は ϵ 依存性はないから，積分要素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}r$ 中の $\mathrm{d}\sigma$ によるϵ^2 の依存性が加わって，$|\boldsymbol{F}_{ii}|$，$|\boldsymbol{N}_{ii}|$ は ϵ^3 の依存性を持つ．一方，分割の数 n は $1/\epsilon^2$ に比例するから，$\sum|\boldsymbol{F}_{ii}|$，$\sum|\boldsymbol{N}_{ii}|$ は ϵ に比例することになる．したがって，細分化を進めると，$|\boldsymbol{F}|$ と $|\boldsymbol{N}|$ は 0 となり

$$\lim_{\epsilon\to 0}\boldsymbol{F}=\lim_{\epsilon\to 0}\sum\boldsymbol{F}_{ii}=0,\qquad \lim_{\epsilon\to 0}\boldsymbol{N}=\lim_{\epsilon\to 0}\sum\boldsymbol{N}_{ii}=0 \tag{46}$$

が言えたことになる．なお，$\sum\sum\boldsymbol{F}_{ij}$, $\sum\sum\boldsymbol{N}_{ij}$ について同じような議論をすると，$|\boldsymbol{F}_{ij}|$，$|\boldsymbol{N}_{ij}|$ は ϵ^4 に比例するが，加える項の数$\dfrac{1}{2}n(n-1)$ が $1/\epsilon^4$に比例するので，$\sum\sum|\boldsymbol{F}_{ij}|$，$\sum\sum|\boldsymbol{N}_{ij}|$ は ϵ^0 の ϵ依存性を持つことになり，このような議論のみによっては 0 となることは示されない．したがって，第 5 節のように確かめることが必要であった訳である．

8. まとめ

定常電流を含む系の磁気的相互作用を，静磁場を消去して遠隔作用論的に定式化するときは，相互作用の要素として電流要素を取ることは，混乱を引き起こす．そうではなく，無限小定常電流回路＝無限小磁気双極子を相互作用の要素として選ぶ必要がある．そして，このとき作用反作用の法則は一般化されなくてはならない．したがって，作用反作用の法則について述べるときは及ぼしあう力の総和が 0 であることを確認するだけではなく，及ぼしあう力のモーメントの総和も 0 であることを調べなければならない．我々は，この小論で以上のような問題の定式化を行うと同時に式 (7) とともに式 (8) が成り立つことを直接計算で示した．つづいて，一つの定常電流回路の自己作用を分析し，この場合も，力の総和と力のモーメントの総和が 0 となることを示した．もちろん，電磁

気学を専門基礎とする学生は別にして，大学の初学年の学生に以上のような煩雑な計算を実行して式 (7)，(8) が成立することの確認を行うことが適切であるとは言えないだろう．しかし，定常電流が無限小磁気双極子の集団であり，したがってその行う作用については，力以外に（偶力の）モーメントが存在し，このため作用反作用の法則が一般化されなければならないこと，これらのことを理解させることは，電磁気学の基本を理解させるうえで重要であると確信する．

付録

任意の向き付きの閉曲線を C，これを周とする任意の曲面を Sとする．また，図5のように右ねじを曲面 S に垂直に置き，これを閉曲線 C の向きに合わせて回転させたとき右ねじの進む向きを曲面の正の向きとし，その向きの単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．

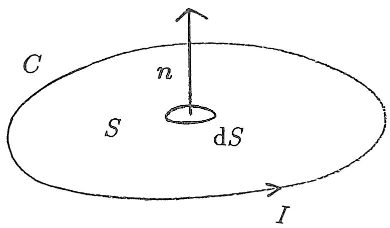

図 5

ベクトル解析で用いられる形での Stokes の定理は，$\boldsymbol{\Phi}$ を任意のベクトル場，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ を C 上の線要素，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ を S 上の面要素として次のように表される．

$$\begin{aligned}&\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Phi}\\ &=\oint_C \mathrm{d}r_k\Phi_k=\int_S \epsilon_{ijk}\mathrm{d}S_i\nabla_j\Phi_k \\ &=\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\Phi})=\int_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\cdot\boldsymbol{\Phi}\end{aligned} \tag{A–1}$$

ここで，∇ はナブラ演算子 $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ であり，ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである．また同一の添字については和をとる規約を用いている．このように Stokes の定理は周回線積分を面積分に変換する定理であるが，被積分量は上記のようなベクトル場である必要はなく，任意のテンソル場 $\Phi_{kl_1l_2\cdots l_n}$ について次式が成立する．

$$\begin{aligned}&\oint_C \mathrm{d}r_k\Phi_{kl_1l_2\cdots l_n}\\ &=\int_S \epsilon_{ijk}\mathrm{d}S_i\nabla_j(\Phi_{kl_1l_2\cdots l_n})\\ &=\int_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)_k\Phi_{kl_1l_2\cdots l_n}\end{aligned} \tag{A–2}$$

本論で必要なタイプの線積分にこの Stokes の定理を適用する．まず

$$\begin{aligned}\oint_C(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Phi})_i&=\oint_C\epsilon_{ijk}\mathrm{d}r_j\Phi_k\\ &=\int_S\epsilon_{ijk}(\epsilon_{lmj}\mathrm{d}S_l\nabla_m)\Phi_k\\ &=\int_S\{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{\Phi}\}_i\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Phi}=\int_S(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{\Phi} \tag{A–3}$$

次に

$$\begin{aligned}&\oint_C(\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Phi}))_i\\ &=\oint_C\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\mathrm{d}r_l(r_j\Phi_m)\\ &=\int_S\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}(\epsilon_{lpq}\mathrm{d}S_p\nabla_q)(r_j\Phi_m)\\ &=\int_S\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\epsilon_{lpq}\mathrm{d}S_p\{(\nabla_q\Phi_m)r_j+\Phi_m(\nabla_q r_j)\}\\ &=\int_S\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\epsilon_{lpq}\mathrm{d}S_p\{(\nabla_q\Phi_m)r_j+\Phi_m\delta_{qj}\}\\ &=\int_S\{\boldsymbol{r}\times((\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{\Phi})+\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\Phi}\}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\oint_C\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Phi})\\ &=\int_S\boldsymbol{r}\times\{(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\nabla)\times\boldsymbol{\Phi}\}+\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\Phi}\end{aligned} \tag{A–4}$$

ここで，完全反対称テンソルの縮約公式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{A–5}$$

を用いての式変形

$$\begin{aligned}&\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\epsilon_{lpq}\mathrm{d}S_p\Phi_m\delta_{qj}\\ &=\delta_{qj}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\epsilon_{lpq}\mathrm{d}S_p\Phi_m\\ &=(\delta_{il}\delta_{qm}-\delta_{im}\delta_{ql})\epsilon_{lpq}\mathrm{d}S_p\Phi_m\\ &=\epsilon_{ipq}\mathrm{d}S_p\Phi_q\\ &=(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{\Phi})_i\end{aligned} \tag{A–6}$$

を用いた．

（受理　平成4年3月20日）