Verallgemeinerung des Abtast-Theorems und Interpolationsformel

von

Fukuko Yuasa*) und Éi Iti Takizawa**)

湯浅富久子・瀧澤英一

Zusammenfassung

Es wird eine Verallgemeinerung des Abtast-Theorems angegeben, wobei die abgetasteten Werte einer stetigen Funktion und derer Ableitungen hoher Ordnung berücksichtigt werden. Neue Abtast-Funktion ist eingeführt, wo das Abtast-Intervall nicht viel gleichmäßig verteilt ist.

§0. Einleitung

Someya-Shannon'sches Abtast-Theorem[1)2)] lautet

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi - \gamma}{\beta}\right) \bullet \frac{\sin(\beta z + \gamma - n\pi)}{\beta z + \gamma - n\pi}, \tag{0-1}$$

mit einem orthogonalen Funktionensysteme:

$$\left\{\frac{\sin(z - n\pi)}{z - n\pi}; \quad \text{n=ganze Zahlen}\right\} \quad \text{im Intervall} \quad -\infty<z<+\infty, \tag{0-2}$$

wobei f(z) eine stetige Funktion von z ist, und β und γ Konstanten.

Dieses Theorem könnte in viele Richtungen verallgemeinert werden. Die Verallgemeinerung des Abtast-Theorems und der Wiederaufbau der band-begrenzten Funktion aus den abgetasteten Werten und abgetasteten Ableitungen sind schon versucht.[3)~14)] Das Abtast-Theorem ist auch im Falle von einem stochastischen Prozesse[15)] mit kontinuierlichem Parameter verallgemeinert. Andererseits ist es schon bekannt[16)], daß die Länge des Abtast-Intervalls nicht immer gleichmäßig sein kann.

Hier in dieser Abhandlung geben die Autoren eine andre Verallgemeinung des Abtast-Theorems an, um eine kontinuierliche Funktion aus ihren abgetasteten Werten und abgetasteten Ableitungen hoher Ordnung wieder aufzubauen.[17)~25)] Bezüglich dieses Theorems sind einige neue Abtast-Formeln angegeben. Einige Bemerkungen über die Abtast-Formeln sind auch gemacht.

---

*) Staatliches Laboratorium für Hoch-Energie-Physik, Tsukuba-si, Ibaraki-ken, Japan
**) Aiti Institut für Technologie, Toyota-si, Aiti-ken, Japan

§1. Verallgemeinertes Abtast-Theorem

Satz I (Verallgemeinertes Abtast-Theorem) Eine ganze Funktion f(z) wird ausgedrückt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n} \sum_{k=0}^{m_n} \sum_{j=0}^{m_n-k} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \bullet \frac{H_n^{(k)}}{k!} \bullet (z-z_n)^{j+k} \bullet \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}} \\ &= \sum_{n} \sum_{s=0}^{m_n} \sum_{j=0}^{s} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \bullet \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} \bullet (z-z_n)^{s} \bullet \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}} \\ &= \sum_{n} \sum_{s=0}^{m_n} \frac{(z-z_n)^s}{s!} \bullet \left[\frac{d^s}{dz^s}\{f(z) \bullet H(z, z_n)\}\right]_{z=z_n} \bullet \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}} \quad , \end{aligned} \tag{1-1}$$

wobei die Reihe in dem beliebigen, begrenzten, geschlossenen Gebiete in der komplexen z-Fläche gleichmäßig konvergiert, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(I) f(z) und g(z) sind ganze Funktion, (1-2)

(II) g(z) hat Nullstellen (m_n+1)-ter Ordnung in den Punkten $z=z_n$ (n = ganze Zahlen), i.e.

$$g(z_n) = g'(z_n) = g''(z_n) = \ldots = g^{(m_n)}(z_n) = 0 \quad ,$$

und (1-3)

$$g^{(m_n+1)}(z_n) \neq 0 \quad ,$$

für m_n nicht-negative ganze Zahl, die von z_n abhängt, und

$$\text{(III)} \qquad \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 \quad . \tag{1-4}$$

Hier werden zur Abkürzung

$$f_n^{(k)} = \left[\frac{d^k}{dz^k} f(z)\right]_{z=z_n} \quad , \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$g_n^{(k)} = \left[\frac{d^k}{dz^k} g(z)\right]_{z=z_n} \quad , \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$H_n^{(k)} = \left[\frac{d^k}{dz^k} H(z, z_n)\right]_{z=z_n} = \frac{(-1)^k}{h_n} \begin{vmatrix} \frac{h_n'}{h_n}, & 1, & 0 & & 0 \\ \frac{h_n''}{h_n}, & {}_2C_1\frac{h_n'}{h_n}, & 1, & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{h_n^{(k-1)}}{h_n}, & {}_{k-1}C_1\frac{h_n^{(k-2)}}{h_n}, & {}_{k-1}C_2\frac{h_n^{(k-3)}}{h_n}, & \ldots, & 1 \\ \frac{h_n^{(k)}}{h_n}, & {}_kC_1\frac{h_n^{(k-1)}}{h_n}, & {}_kC_2\frac{h_n^{(k-2)}}{h_n}, & \ldots, & {}_kC_{k-1}\frac{h_n'}{h_n} \end{vmatrix} ,$$

$$(k=0,1,2,\ldots) \tag{1-5}$$

und

$$h_n^{(k)} = [\frac{d^k}{dz^k} h(z, z_n)]_{z=z_n} \quad , \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

gesetzt. Die Summe in (1-1) soll über alle Punkten $z = z_n$ (n = ganze Zahlen) genommen werden.

Die Funktion

$$h(z, z_n) \equiv \frac{1}{H(z, z_n)} \equiv \frac{g(z)}{(z - z_n)^{m_n+1}} \quad , \tag{1-6}$$

wird als eine **verallgemeinerte Abtast-Funktion** bezeichnet, und die Punkten $z = z_n$ als **Abtast-Punkten**. Der Ausdruck (1-1) selbst wird als eine **verallgemeinerte Abtast-Formel** benannt.

Beweiß des Satzes I ist ganz geradewegs. Unter den Bedingungen (I) und (II) ist die Funktion $f(z)/g(z)$ meromorphisch in der komplexen z-Fläche. Sie hat die Polen (m_n+1)-ter Ordnung in den Punkten $z = z_n$. Nach dem Cauchy'schen Theorem kann man die Funktion $f(z)/g(z)$ durch eine Kontur-Integration entlang einem Kreis von Radius R mit Zentrum im Ursprung ausdrücken, enthaltend die Polen von $f(z)/g(z)$ innerhalb des Kreises $|z| = R$. Wenn man das Radius R nach dem Unendlichen ausbreitet, verschwindet das Kontur-Integral unter der Bedingung (III). Und man hat nur die Residuen in den Punkten $z = z_n$ zu berechnen. Nachdem man die Summe der Residuen berechnet, multipliziert man $g(z)$ zu beiden Seiten des so gewonnenen Ausdrucks und erweist den Satz I.

§2. Bemerkungen über das Verallgemeinerte Abtast-Theorem

Wir können die Bedingung (III) noch schwächer machen. Z.B. kann man anstatt der Bedingung (III) folgendes annehmen:

(III') $$\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = K \quad (= konst.) \quad , \tag{2-1}$$

oder

(III'') $$\lim_{c \to \infty} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\, g(\zeta)} d\xi = K \quad (= konst.) \ , \tag{2-2}$$

wobei der Übergang ($c \to \infty$) bedeutet, eine Jordan-Kurve mit dem genügend großen Durchmesser zu nehmen. Im Falle (III') oder (III'') muß man einen Term $K \cdot g(z)$ in die rechten Seite von (1-1) addieren.

§3. Einige Speziellenfälle des Satzes I

Wenn alle m_n für beliebigen z_n gleich sind, bezeichnet man m_n als m, und bekommt aus dem Satz I den folgenden Satz II.

Satz II

Unter den Bedingungen (I), (II) und (III) ist $f(z)$ folgendermaßen dargestellt:

$$f(z)=\sum_{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{j=0}^{s}\frac{f_n^{(j)}}{j!}\bullet\frac{H_n^{(k)}}{(s-j)!}\bullet(z-z_n)^s\bullet\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m+1}}\quad . \tag{3-1}$$

Aus (3-1) folgt der Satz III.

Satz III Wenn eine ganze Funktion g(z) die Bedingungen (I) ~ (III) erfüllt und auch in dem Punkte $z=z_n$ nach der Taylor'schen Reihe folgendermaßen entwickelt wird:

$$g(z)=A_{m+1}\bullet(z-z_n)^{m+1}+\sum_{s=1}^{\infty}A_{2m+1+s}\bullet(z-z_n)^{2m+1+s},\quad(A_{m+1}\neq 0)$$

dann wird der Ausdruck (3-1) zum (3-2) reduziert:

$$f(z)=\sum_{n}\sum_{s=0}^{m}f_n^{(s)}\bullet\frac{(z-z_n)^s}{s!}\bullet\frac{1}{\frac{g_n^{(m+1)}}{(m+1)!}}\bullet\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m+1}}\quad . \tag{3-2}$$

§4. Abtast-Formeln für kleines m_n

a) Wenn alle Polen von f(z)/g(z) einfach (i.e. $m_n=0$) in allen Punkten $z=z_n$ (n = ganze Zahlen) sind, dann der Ausdruck (1-1) vereinfacht wird, und wir haben die Abtast-Formel:

$$f(z)=\sum_{n}f(z_n)\bullet\frac{g(z)}{(z-z_n)\bullet g'_n}\quad . \tag{4-1}$$

Der Ausdruck (4-1) ist schon von van der Pol[26] eingegeben. D.h., wenn eine ganze Funktion g(z) einfache Nullstellen (Nullstellen 1-ter Ordnung) in allen Punkten $z=z_n$ (n = ganze Zahlen) besitzt, und falls das Fourier-Spektrum einer Funktion f(z) begrenzt ist, und f(z) und g(z) keine gemeinsamen Nullstellen besitzen, dann gilt der Ausdruck (4-1).

b) Wenn alle Polen von f(z)/g(z) in allen Punkten $z=z_n$ (n = ganze Zahlen) 2-fach (i.e., $m_n=1$) sind, dann wird der Ausdruck (1-1) reduziert:

$$f(z)=\sum_{n}\left[f(z_n)+(z-z_n)\bullet\{f'(z_n)-\frac{1}{3}f(z_n)\bullet\frac{g_n^{(3)}}{g_n^{(2)}}\}\right]\bullet\frac{2!\bullet g(z)}{(z-z_n)^2\bullet g_n^{(2)}}\quad . \tag{4-2}$$

c) Wenn alle Polen von f(z)/g(z) in allen Punkten $z=z_n$ (n = ganze Zahlen) 3-fach (i.e., $m_n=2$) sind, dann wird der Ausdruck (1-1) folgendermaßen reduziert:

$$f(z)=\sum_{n}\Big[f(z_n)+(z-z_n)\bullet\{f'(z_n)-\frac{1}{4}f(z_n)\bullet\frac{g_n^{(4)}}{g_n^{(3)}}\}+\frac{1}{2}(z-z_n)^2\bullet\{f''(z_n)-\frac{1}{2}f'(z_n)\bullet\frac{g_n^{(4)}}{g_n^{(3)}}+$$
$$+\frac{1}{2}f(z_n)\bullet[\frac{1}{4}(\frac{g_n^{(4)}}{g_n^{(3)}})^2-\frac{1}{5}\frac{g_n^{(5)}}{g_n^{(3)}}]\}\Big]\bullet\frac{3!\bullet g(z)}{(z-z_n)^3\bullet g_n^{(3)}}\quad . \tag{4-3}$$

d) Falls $m > 0$ ist, ist es praktisch bequem zu nehmen:

$$g(z) = \psi^{m+1}(z) \quad , \tag{4-4}$$

wobei $\psi(z)$ eine ganze Funktion ist, die nur einfache Nullstellen in allen Punkten $z = z_n$ besitzt. So wird die Abtast-Formel (1-1) folgendermaßen dargestellt:

$$f(z) = \sum_n \sum_{s=0}^{m} \sum_{j=0}^{s} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \bullet \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} \bullet (z - z_n)^s \bullet \frac{\psi^{m+1}(z)}{(z - z_n)^{m+1}} \quad , \tag{4-5}$$

wobei $H_n^{(s)}$'s in (1-5) gegeben sind, mit

$$h_n = g_n^{(m+1)} / (m+1)! = (\psi'_n)^{m+1} \quad , \tag{4-6}$$

und

$$\begin{aligned} h_n^{(r)} &= \frac{r!}{(m+1+r)!} \bullet g_n^{(m+1+r)} \\ &= \sum_{\substack{p+q+u+\ldots = m+1 \\ p+2q+3u+\ldots = m+1+r}} \frac{r! \cdot (m+1)!}{p!q!u!\ldots} \bullet (\psi'_n)^p \bullet \left(\frac{1}{2!}\psi''_n\right)^q \bullet \left(\frac{1}{3!}\psi'''_n\right)^u \ldots \quad . \end{aligned} \tag{4-7}$$

Hier wollen wir bemerken, eine Abtast-Formel als eine **Interpolationsformel** benutzen zu können. Eine Abtast-Formel als eine Extrapolationsformel anzusehen, ist nicht sehr bequem, weil jeder Term in (1-1) immer die gleichgültige Rolle spielt, und man kann diese einzelnen Termen nicht einfach vernachlässigen.

§5. Detaillierte Beispiele der Abtast-Formel für m = 0

Für $m = 0$ kommt Formel (4-1) zur Frage.

a) Wir nehmen ein Orthogonalsystem von Polynomen im Gebiet $a \leqq z \leqq b$:

$$\{\phi_k(z) \mid k=1,2,3,\ldots; \int_a^b \omega(z)\, \phi_m(z)\, \phi_n(z) dz = \delta_{m,n}\} \ , \tag{5-1}$$

mit einem Polynom s-ten Grades $\phi_s(z)$ und einer Dichte-Funktion $\omega(z)$. Aus (4-1) und mittels $\phi_s(z)$ kann man eine Näherungsformel $\bar{f}(z)$ für $f(z)$ berechnen:

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=1} f(z_n) \bullet \frac{\phi_s(z)}{(z - z_n) \bullet \phi'_s(z_n)} \quad . \tag{5-2}$$

Die rechte Seite von (5-2) ist ein Polynom (s-1)-ten Grades. Wenn $f(z)$ ein Polynom (s-1)-ten Grades ist, dann stimmt $\bar{f}(z)$ mit $f(z)$ in s Punkten ein. Deshalb bemerkt man sofort, daß $\bar{f}(z) \equiv f(z)$ sein muß. Wenn $f(z)$ ein Polynom höheren Grades als (s-1) ist, dann ist $\bar{f}(z)$ nicht $f(z)$ selbst, sondern ergibt sich als eine Näherungsformel von $f(z)$.

Falls $f(z)$ ein Polynom (2s-1)-ten Grades ist, besteht

$$\int_a^b \omega(z)\, f(z) dz = \int_a^b \omega(z)\, \bar{f}(z) dz \quad . \tag{5-3}$$

Die Differenz $f(z)-\bar{f}(z)$ ist ein Polynom höchstens (2s-1)-ten Grades, und $\phi_s(z)$ hat Nullstellen zwischen den Nullstellen von $f(z)-\bar{f}(z)$, weil es besteht: $f(z)=\bar{f}(z)$ für z_n ($\phi_s(z_n)=0$). So bezeichnet man $f(z)-\bar{f}(z)=\phi_s(z)\cdot\gamma(z)$, wobei $\gamma(z)$ ein Polynom höchstens (s-1)-ten Grades ist. Und man bekommt

$$\int_a^b \omega(z)\, f(z) dz - \int_a^b \omega(z)\, \bar{f}(z) dz = \int_a^b \omega(z)\ \phi_s(z)\ \gamma(z)\, dz = 0 \quad ,$$

da $\phi_s(z)$ orthogonal zu einem Polynom niedriger als s-ten Grades ist. Wir setzen (5-2) in (5-3) ein, und erhalten

$$\int_a^b \omega(z)\, f(z)\, dz = \sum_{n=1}^{s} f(z_n) \bullet \lambda_n \quad , \tag{5-4}$$

mit einer Konstanten λ_n (**Christoffel'sche Nummer**):

$$\lambda_n = \int_a^b \omega(z) \bullet \frac{\phi_s(z)}{(z - z_n) \bullet \phi'_s(z_n)}\, dz \quad . \tag{5-5}$$

Wenn f(z) ein Polynom höchstens (2s-1)-ten Grades ist, dann kann man das Integral (5-4) berechnen, falls die Werte von f(z) in den $m(<s)$ Punkten bekannt sind. Wenn auch f(z) nicht solch ein Polynom ist, kann man Integral (5-4) als Nährungsformel berechnen. Diese Nährungsformel ist nichts andres als die **Gauß'sche Quadratur-Formel**.

b) Um die **Lagrange'sche Formel** zu bekommen, nimmt man

$$g(z) = \prod_{k=1}^{s} (z - z_k) \quad , \tag{5-6}$$

und erhält eine Näherungsfunktion $\bar{f}(z)$:

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=1}^{s} f(z_n) \bullet L_n(z) \quad , \tag{5-7}$$

mit

$$L_n(z) = \prod_{k=1,\, k\neq n}^{s} \frac{z - z_k}{z_n - z_k} \quad , \tag{5-8}$$

und

$$L_n(z_p) = \delta_{n,p} \quad . \ (1\leq p\leq s) \tag{5-9}$$

c) Man braucht ein **Tschebyscheff'sches Polynom**:

$$g(z) = \cos(\alpha \arccos \beta z) \quad , \quad \alpha\text{=positive ganze Zahl und } \beta\neq 0 \tag{5-10}$$

und erhält Nährungsformel $\bar{f}(z)$

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_n (-1)^n \bullet f(z_n) \bullet \sqrt{1-\beta^2 z_n^2} \bullet \frac{\cos(\alpha \arccos \beta z)}{\beta(z-z_n)} \quad , \tag{5-11}$$

mit

$$\cos(\alpha \arccos \beta z_n) = 0 \quad , \tag{5-12}$$

d.h.,

$$\beta z_n = \cos\{(2n+1)\pi/2\alpha\} \quad . \quad \text{(n=ganze Zahlen)}$$

Man setzt $\beta z = \cos\theta$ und $\beta z_n = \cos\theta_n$, und erhält

$$\bar{f}\left(\frac{\cos\theta}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha}\sum_n (-1)^n \bullet f\left(\frac{\cos\theta_n}{\beta}\right) \bullet \sin\theta_n \bullet \frac{\cos(\alpha\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_n} \tag{5-13}$$

Integriert (5-13), gilt

$$\int_0^\pi \bar{f}\left(\frac{\cos\theta}{\beta}\right) d\theta = \frac{1}{\alpha}\sum_n (-1)^n \bullet f\left(\frac{\cos\theta_n}{\beta}\right) \bullet \sin\theta_n \bullet \oint_0^\pi \frac{\cos(\alpha\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_n} d\theta \quad , \tag{5-14}$$

wobei Integral $\oint_0^\pi d\theta$ bedeutet, den Cauchy'schen Hauptwert im Punkte $\theta = \theta_n$ anzunehmen. Für α = positive ganze Zahl wird der Ausdruck (5-14) folgendermaßen reduziert:

$$\int_0^\pi \bar{f}\left(\frac{\cos\theta}{\beta}\right) d\theta = \frac{\pi}{\alpha}\sum_n (-1)^n \bullet f\left(\frac{\cos\theta_n}{\beta}\right) \bullet \sin(\alpha\theta_n) \quad , \tag{5-15}$$

mittels der Integralformel:

$$\oint_0^\pi \frac{\cos(\alpha\theta)}{\cos\theta - \cos\theta^*} d\theta = \pi \frac{\sin(\alpha\theta^*)}{\sin\theta^*} \quad . \quad (\alpha\text{=positive, ganze Zahl})$$

Die Ausdrücke (5-13) und (5-15) sind eigentlich die von **Multhopp** gegebene Näherungsformel[27]) von Quadratur.

d) Man nimmt

$$g(z) = \sin(\alpha z + \beta) \quad , \quad (\alpha, \beta\text{=const.}, \alpha \neq 0.) \tag{5-16}$$

und erhält **Sommeya-Shannon'sche Abtast-Formel**[1)2)]:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi - \beta}{\alpha}\right) \bullet \frac{\sin(\alpha z + \beta - n\pi)}{\alpha z + \beta - n\pi} \quad , \quad (\alpha\neq 0) \tag{5-17}$$

mit der Abtast-Funktion:

$$\operatorname{sinc}(\alpha z+\beta-n\pi)\equiv\frac{\sin(\alpha z+\beta-n\pi)}{\alpha z+\beta-n\pi}\ . \tag{5-18}$$

Shannon'sche Formel[2] entspricht zu (5-17) für $\alpha=1$ und $\beta=0$.
Z.B. wird der Ausdruck (5-17) folgendes geführt:

$$\exp[-\gamma z^2+i\beta z]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-\gamma(n\pi/\alpha)^2+i(n\pi\beta/\alpha)]\cdot\frac{\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}\ . \qquad (\gamma>0,\ \alpha\neq0) \tag{5-19}$$

e) Andre Beispiele

Nun notieren wir hiermit die Funktion g(z), die Abtast-Formel und die Gleichung, die die Werte z_n angibt.

i) Für

$$g(z)=z\sin(\alpha z)-A\cos(\alpha z)\ , \qquad (\alpha A\neq0) \tag{5-20}$$

heißt die Abtast-Formel:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\lambda_n)\cdot\frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{\cos(\alpha\lambda_n)}{1+\dfrac{\sin(2\alpha\lambda_n)}{2\alpha\lambda_n}}\cdot\frac{z\sin(\alpha z)-A\cos(\alpha z)}{\alpha z-\alpha\lambda_n}\ , \tag{5-21}$$

mit

$$\lambda_n\cdot\sin(\alpha\lambda_n)-A\cos(\alpha\lambda_n)=0\ . \tag{5-22}$$

ii) Für

$$g(z)=z\cos(\alpha z)-B\sin(\alpha z), \qquad (\alpha B\neq0) \tag{5-23}$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\eta_n)\cdot\frac{-1}{\eta_n}\cdot\frac{\sin(\alpha\eta_n)}{1-\dfrac{\sin(2\alpha\eta_n)}{2\alpha\eta_n}}\cdot\frac{z\cos(\alpha z)-B\sin(\alpha z)}{\alpha z-\alpha\eta_n}\ , \tag{5-24}$$

mit

$$\eta_n\cdot\cos(\alpha\eta_n)-B\sin(\alpha\eta_n)=0\ . \tag{5-25}$$

Für die Grenzfälle $A\to0$ und $B\to0$ in den Ausdrücken (5-20) und (5-23) entstehen

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha z\cdot\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\{f(0)+zf'(0)\}\cdot\frac{\sin(\alpha z)}{\alpha z}, \tag{5-26}$$

und

$$f(z) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\bullet f\left(\frac{n\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{2\alpha}\right)\bullet\frac{\alpha z\bullet\cos(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi-(\pi/2)}+f(0)\bullet\cos(\alpha z)\,. \tag{5-27}$$

Diese Abtast-Formeln sind etwas andres als Someya-Shannon'sche Abtast-Formeln. Beispiele von (5-26) und (5-27) lauten:

$$\sin(\beta z) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n}\bullet\sin\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\bullet\frac{\alpha z\bullet\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\frac{\beta}{\alpha}\sin(\alpha z)\,, \quad (\alpha\beta\neq 0) \tag{5-28}$$

$$\cos(\beta z) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n}\bullet\cos\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\bullet\frac{\alpha z\bullet\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\frac{\sin(\alpha z)}{\alpha z}\,, \quad (\alpha\beta\neq 0) \tag{5-29}$$

$$J_0(\beta z) = \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\bullet J_0\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\bullet\frac{\alpha z\bullet\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\frac{\sin(\alpha z)}{\alpha z}\,, \quad (\alpha\beta\neq 0) \tag{5-30}$$

und

$$\sin(\beta z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\bullet\frac{\sin\{(n\pi\beta/\alpha)+(\beta\pi/2\alpha)\}}{n\pi+(\pi/2)}\bullet\frac{\alpha z\cos(\alpha z)}{\alpha z-n\pi-(\pi/2)}\,, \quad (\alpha\beta\neq 0) \tag{5-31}$$

$$\cos(\beta z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\bullet\frac{\cos\{(n\pi\beta/\alpha)+(\beta\pi/2\alpha)\}}{n\pi+(\pi/2)}\bullet\frac{\alpha z\cos(\alpha z)}{\alpha z-n\pi-(\pi/2)}+\cos(\alpha z)\,, \quad (\alpha\beta\neq 0) \tag{5-32}$$

$$J_0(\beta z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\bullet\frac{J_0\{(n\pi\beta/\alpha)+(\beta\pi/2\alpha)\}}{n\pi+(\pi/2)}\bullet\frac{\alpha z\cos(\alpha z)}{\alpha z-n\pi-(\pi/2)}+\cos(\alpha z)\,. \quad (\alpha\beta\neq 0) \tag{5-33}$$

Wheelon[28] zeigte (5-30) für $\alpha = \beta = 1$.

iii) Für

$$g(z) = J_\nu(\alpha z)\,, \quad (\alpha\neq 0) \tag{5-34}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(j_n)\bullet\frac{1}{J'_\nu(\alpha j_n)}\bullet\frac{J_\nu(\alpha z)}{\alpha z-\alpha j_n}\,,$$

mit

$$J_\nu(\alpha j_n) = 0\,, \tag{5-35}$$

wobei $J_\nu(z)$ eine Bessel'sche Funktion ν-ter Ordnung ist.

iv) Für

$$g(z) = zJ_1'(\alpha z) + hJ_1(\alpha z) \quad , \quad (\alpha h \neq 0) \tag{5-36}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_n) \bullet \frac{\alpha \lambda_n}{\{1 - \alpha^2 (\lambda_n^2 + h^2)\} \bullet J_1(\alpha \lambda_n)} \bullet \frac{zJ_1'(\alpha z) + hJ_1(\alpha z)}{z - \lambda_n} \,, \tag{5-37}$$

mit

$$\lambda_n J_1'(\alpha \lambda_n) + hJ_1(\alpha \lambda_n) = 0 \quad . \tag{5-38}$$

v) Für

$$g(z) = T_\nu(\alpha z, \beta z) \quad , \quad (\alpha\beta \neq 0) \tag{5-39}$$

wo

$$T_\nu(x, z) \equiv N_\nu(x) J_\nu(z) - J_\nu(x) N_\nu(z) \quad , \quad (\nu = \text{ganze Zahl}, x>0, z>0) \tag{5-39'}$$

ist, wobei $N_\nu(z)$ eine Neumann'sche Funktion ν-ter Ordnung ist.

$$f(z) = -\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_n) \bullet \frac{\lambda_n J_\nu(\alpha \lambda_n) \bullet J_\nu(\beta \lambda_n)}{\beta J_\nu^2(\alpha \lambda_n) - \alpha J_\nu^2(\beta \lambda_n)} \bullet \frac{T_\nu(\alpha z, \beta z)}{z - \lambda_n} \,, \quad (0<\alpha<\beta, 0<z) \tag{5-40}$$

mit

$$T_\nu(\alpha \lambda_n, \beta \lambda_n) = 0 \quad . \tag{5-41}$$

vi) Für

$$g(z) = \sin(\alpha z^2 + \beta) \quad , \quad (\alpha \neq 0) \tag{5-42}$$

$$f(z) = \sum_n f(z_n) \bullet \frac{\sin(\alpha z^2 + \beta - n\pi)}{2\alpha z_n (z - z_n)} \,, \tag{5-43}$$

mit

$$\sin(\alpha z_n^2 + \beta) = 0 \,, \qquad \text{i.e.} \quad z_n = \pm\sqrt{(n\pi - \beta)/\alpha} \,. \quad (n = \textit{ganze Zahlen}) \tag{5-44}$$

vii) Für andre Beispiele kann man als g(z) Mathieu'sche Funktionen, reziproke Gamma-Funktion mit negativem Argumente u.s.w., annehmen, und erhält die Abtast-Formeln, die wir hier weglassen.

§6. Beispiele der Abtast-Formeln für m = 1

Für m = 1, i.e. $g(z) = \psi^2(z)$, kommt (3-2) zur Frage.

a) Man nimmt $\psi(z)$ als $\phi_s(z)$, ein orthogonales Polynom s-ten Grades in (5-1), und erhält

$$f(z) = \sum_{n} \sum_{s=0}^{1} \sum_{j=0}^{s} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \bullet \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} \bullet (z-z_n)^s \bullet \frac{\phi_s^2(z)}{(z-z_n)^2} \quad , \tag{6-1}$$

mit

$$\phi_s(z_n) = 0.$$

Wenn man insbesondere

$$g(z) = \psi^2(z) = \prod_{k=1}^{s} (z-z_k)^2 \quad , \tag{6-2}$$

annimmt, erhält man aus (4-2) folgendes:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{s} \left[f_n - 2f_n \bullet \sum_{\substack{p=1 \\ p\neq n}}^{s} \frac{1}{(z_n - z_p)} \bullet (z-z_n) + f_n' \bullet (z-z_n) \right] \bullet \frac{1}{\prod\limits_{\substack{p=1 \\ p\neq n}}^{s} (z_n - z_p)^2} \bullet \frac{\prod\limits_{k=1}^{s} (z-z_k)^2}{(z-z_n)^2} \quad . \tag{6-3}$$

D.h., eine **Lagrange'sche Formel** mit den abgetasteten Werten f_n und abgetasteten Ableitungen 1-ter Ordnung f_n'.

b) Man nimmt ein Tschebyscheff'sches Polynom als $\psi(z)$:

$$g(z) = \psi^2(z) = \cos^2(\alpha \arccos \beta z) \quad , \quad (\alpha\beta \neq 0,\ \alpha = \text{ganze Zahl}) \tag{6-4}$$

und erhält

$$f(z) = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \sum_{n} \left[f_n \bullet (1-\beta^2 z_n^2) - f_n \bullet \beta^2 \bullet z_n \bullet (z-z_n) + f_n' \bullet (1-\beta^2 z_n^2) \bullet (z-z_n) \right] \frac{\cos^2(\alpha \arccos(\beta z))}{(z-z_n)^2} \, , \tag{6-5}$$

mit

$$\beta z_n = \cos\{(2n+1)\pi/(2\alpha)\} \quad . \quad (n = \text{ganze Zahlen}) \tag{6-6}$$

c) Für

$$g(z) = \psi^2(z) = \sin^2(\alpha z + \beta) , \quad (\alpha\beta \neq 0) \tag{6-7}$$

erhält man

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f(z_n) + (z-z_n) \bullet f'(z_n) \right] \bullet \frac{\sin^2(\alpha z + \beta)}{(\alpha z - \alpha z_n)^2} \quad , \tag{6-8}$$

mit

$$z_n = (n\pi - \beta)/\alpha \quad \text{(n=ganze Zahlen)} \tag{6-9}$$

Wenn das Fourier-Spektrum von f(z) in einem endlichen Gebiete begrenzt ist, bezeichnet man die Maximum-Frequenz als W. Und falls

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{2}{W} \quad , \tag{6-10}$$

besteht, dann gilt die Bedingung (III) in (1-4).

Deswegen ist die Bedingung (6-10) eine hineichende Bedingung für (6-8).

d) Andre Beispiele

In ähnlicher Weise kann man annehmen:

$$g(z) = (z \sin \alpha z - A \cos \alpha z)^2 \quad , \quad (\alpha A \neq 0)$$

$$g(z) = (z \cos \alpha z - B \sin \alpha z)^2 \quad , \quad (\alpha B \neq 0)$$

$$g(z) = J_1^2(\alpha z) \quad , \quad (\alpha \neq 0)$$

$$g(z) = \{z J_1'(\alpha z) + h J_1(\alpha z)\}^2 \quad , \quad (\alpha h \neq 0)$$

$$g(z) = T^2(\alpha z, \beta z) \quad , \quad (\alpha\beta \neq 0)$$

mit $T(\alpha z, \beta z)$ gegeben in (5-39'),

$$g(z) = \sin^2(\alpha z^2 + \beta) \quad , \quad (\alpha \neq 0)$$

und

$g(z)$ = Quadrat von Mathieu'schen Funktionen u.s.w.

Dann erhält man die Abtast-Formeln, die die abgetasteten Werte f_n einer Funktion f(z) und die abgetasteten Ableitungen 1-ter Ordnung f_n' enthalten.

§7. Beispiele der Abtast-Formeln für m = 2

Wir benutzen den Ausdruck (4-3) für (4-4) mit m = 2, d.h.,

$$g(z) = \psi^3(z) \quad . \tag{7-1}$$

Als $\psi(z)$ können wir nehmen:

$\psi(z) = \phi_k(z)$ in (5-1), order $\prod_{k=1}^{s} (z-z_k)$ in (5-6), cos (α arccos βz) in (5-10), sin ($\alpha z + \beta$) in (5-16), $z \sin \alpha z - A \cos(\alpha z)$ in (5-20), $z \cos(\alpha z) - B \sin(\alpha z)$ in (5-25), $J_\nu(\alpha z)$ in (5-34), $zJ'_\nu(\alpha z) + hJ_1(\alpha z)$ in (5-36), $T_\nu(\alpha z + \beta z)$ in (5-39'), u.s.w.

Die genauen Abtast-Formeln werden wir hier weglassen. Nur notieren wir eine Abtast-Formel für $g(z) = \sin^3(\alpha z + \beta)$. Es gilt:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[f(z_n)+(z-z_n)\cdot f'(z_n)+\frac{1}{2}(z-z_n)^2\cdot\{f''(z_n)+\alpha^2 f(z_n)\}\right]\cdot\frac{(-1)^n\cdot\sin^3(\alpha z+\beta)}{(\alpha z-\alpha z_n)^3}, \quad (7\text{-}2)$$

wo $z_n=(n\pi-\beta)/\alpha$ (n = ganze Zahlen) sind.

§8. Zum Schluß

In dieser Abhandlung haben die Autoren ein verallgemeinertes Abtast-Theorem (Satz I) angegeben, womit eine ganze Funktion f(z) durch die abgetasteten Werte f_n und die abgetasteten Ableitungen $f_n^{(s)}$ hoher Ordnung dargestellt wird.

Viele der bisher gegebenen Formeln[3)~14)16)~25)] können mittels dieses verallgemeinerten Abtast-Theorems leicht hergeleitet werden. Einige Beispiele der Abtast-Formeln sind auch hergegeben.

Es sollte auch hiermit betonen, daß das angegebene verallgemeinerte Abtast-Theorem in vielen Feldern nicht nur in der Physik, sondern auch in der Technik gute Anwendung finden könnte.

Literatur

1) Someya, I.: *Transmission of Wave-Forms* (1949), Syûkyôsya Book Co., Tôkyô. (auf Japanisch)
2) Shannon, C.E.: Bell System Techn. Journ. **27** (1948), 379, 623.
Shannon, C.E., und Weaver, W.: *Mathematical Theory of Communication* (1949), Univ. of Illinois Press.
3) Kohlenberg, A.: J. Appl. Phys. **24** (1953), 1432.
4) Fogel, L.J.: IRE Trans. on Information Theory **IT-1** (1955), 47.
5) Jagerman, D.L., und Fogel, L.J.: IRE Trans. on Information Theory **IT-2** (1956), 139.
6) Bond, F.E., und Cahn, C.R.: IRE Trans. on Information Theory **IT-4** (1958), 110.
7) Linden, D.A., und Abramson, N.M.: Information and Control **3** (1960), 26.
8) Takizawa, É.I., Kobayasi, K., und Hwang, J.-L.: Chinese Journ. Phys. **5** (1967), 21.
9) Takizawa, É.I.: *Information Theory and Its Exercises* (1966), Hirokawa Book Co., Tôkyô, s. 275. (auf Japanisch)
10) Takizawa, É.I., und Kobayasi, K.: Memo, Fac. Engng., Nagoya Univ. **21** (1969), 153.
11) Takizawa, É.I., Kobayasi K., und Hwang J.-L.: Memo. Institute of Math. Analysis, Kyôto Univ. **No.85** (April 1970), 16.
12) Takizawa, É.I., und Hwang J.-L.: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **13** (1971), 111.
13) Isomiti, Y.: Research Group of Information Theory, Report **IT 67-36** Soc. of Electrocommunication (1967), 1. (auf Japanisch)
14) Takizawa, É.I., und Isigaki H.: Memo. Fac. Engineering, Hokkaidô Univ. **13** (1974), 281.
15) Balakrishnan, A.V.: IRE Trans. on Information Theory **IT-3** (1957), 143.
16) Yen, J.L.: IRE Trans. on Circuit Theory **CT-3** (1956), 251.
17) Takizawa, É.I. und Hwang J.-L.: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **13** (1972), 111.
18) Takizawa, É.I.: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **14** (1975), 33.
19) Takizawa, É.I., und Hsieh, S.M.: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **14** (1975), 49.
20) Takizawa, É.I., und Horng, J.C.: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **14** (1975), 63.

21) Takizawa, É.I.: Seimitu-Kikai (Präzisionsmaschine) **41** (1975), 1050. (auf Japanisch).
22) Takizawa, É.I., und Horng, J.C.: Seimitu-Kikai (Präzisionsmaschine) **42** (1976), 923. (auf Japanisch)
23) Takizawa, É.I.: Zeits. f. Angewandte Math. Mech. **59** (1979), 15.
24) Takizawa, É.I.: Proc. First Inern. Cof. Production Engng., Design and Control **1** (1980), Alexandria, Egypt.
25) Nagasima, T., und Takizawa, É.I.: Reports Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **120** (1984), 99. (auf Japanisch)
26) Reza, F.M.: *Introduction to Information Theory* (1961), McGraw-Hill, New York. s. 454.
27) Multhopp. H.: Luftfahrtforschung **15** (1938), 153.
28) Wheelon, A.D.: *Tables of Summable Series and Integrals Involving Bessel Functions* (1968), Holden-day, San Francisco, Calfornia. s. 48 und 50.

(Eingegangen am 20. Februar 1992)