$L_p^{(m)}$ 近似について

皆 福 正 彦

On the $L_p^{(m)}$ Approximation

Masahiko KAIFUKU

Our paper is devoted to the theoritical and the practical approach for approximating given practical functions or data with the theory of functional vector normed space, particulary $L_p^{(m)}$ norm. As a given function f_1 belongs to the one (functional) space F_1 : $f_1 \in F_1$, and we want to approximate the f_1 with the other function f_2, which is belongs F_2 : $f_2 \in F_2$. Two methods will be possible to approach this problem in the present case ; i.e. the one of which is that, at first, finding the third functional space F_3, such that $f_1, f_2 \in F_3$ and $F_3 \subset F_1 \cap F_2$, using the defined norm $\|\cdot\|_{F_3}$ on the space F_3, and function f_3, such as the minimizing the distance $d(f_1, f_3)$, should be search out. the other is the procedure that, if $F_1 \cap F_2 = \phi$ (i.e., null space), find out the third space F_3 : $F_3 \supset F_1 \cup F_2$, and using the norm, difined on the space F_3, the same procedure as the first one would be done. Above all, particullary the importance of Banach, and Hilbert space will be pointed out in the section of the paper.

1. 問題の定式化

近似問題については，既に過去において色々論じられてきた．しかし，立ち返って考えてみると，既成の書物にのっている近似手法，すなわちチエビシエフ近似，最小二乗近似，等々の近似方法は，どんな意味での最良，または最適近似であるか．または，具体的に近似しようとする函数，或いはデータと一体如何なる関係にあるのか，という点となると殆んど明らかにされていない．従って，従来の近似方法で間に合う限りにおいては問題はないであろうが，一旦そのような方法をもってしては，完全に無力であるような場合に相遇したときには，殆んど手のつけようがないものと思われる．

そこでこの論文では，先ず，近似問題の一般的な定式化を行い，そのような数学的に定式化された近近問題を解く方法として，函数空間の立場から，一般的に論じてみた．

先ず，問題の定式化：

与えられた函数は，線型ベクトル函数のある要素であるか，または，適当な物理現象の実験データとしてデスクリートな形式で与えられるものとする．即ち

(1; 1)　$f(x) \in F$，または，$f \in F$

(1; 2)　$\mathscr{D}_n^{(m)} = \{(x_i^{(m)}, y_i^{(m)})\,;\, i \in \{1, \cdots, N\}$, m は正の整数$\}$

ただし，この場合，Fはある区間内で連続な函数全体の集合，または，L. Shwartz に従って，有界な台をもつ無限回微分可能な函数の空間全体の空間，または単に無限回微分可能な函数空間と考えておいてよい．さて，そのような空間 F の要素 f が1つ与えられたとしたときに，それを他の既知の函数空間 F_{known} の適当な部分集合 $\{f_k\,; k \in I\}$ の線型結合で，一定の定義された距離：

(1; 3)　$d(f, f_{known})$, $f \in F$, $f_{known} \in F_{known}$

を最小にするような f_{known} を選ぶことである．もしそのような f_{known} が：

(1; 4)　$f_{known} = \sum_{k \in I} a_k f_k$,

の形式で一意的に決定出来るならば，その f_{known} によって f の代りとさせること，即ち，

(1; 5)　$f \equiv f_{known}$

とおいてしまうこと．これを近似問題という．そうすると，

(1; 6)　$f = \sum_{k \in I} a_k f_k$

ということになる．

Duality について：

上記した近似問題は，距離の最小値を選ぶという意味において，一種の最適極値問題である．しかし最適極値問題は一方また最大値を選ぶという意味における極値問題が必ず存在する．従って，上に定式化された問題の dual な問題が数学的には必ず存在する．具体的に云え

ば，デスクリートを場合について，次の Hölder の不等式が成り立つ．

(1; 7) $\sum_{k=1}^{N} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{N} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} y_k^p\right)^{1/q}$

$$p,\ q>0 \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

この公式において，もし上記定式化が p ノルムにおける（後で説明する）最小値を求める問題であるならば，q ノルムにおいては最大値を求める問題になることは自明であろう．

2. 函　数　空　間

2. 1　Banach 空間，特にソボレフ空間

函数空間は上で定義された．問題はこの空間にいかなる距離を持ち込むかということである．その場合，Banach 空間が最も広い意味で“完備な線型ノルム空間”として，近似問題に適当な空間であろう．

Banach 空間の定義：

(2.1; 1)　Banach 空間とは完備な線型ノルム空間である．

この Banach 空間においては，ソボレフの埋蔵定理が成立する．

定理：その（起函数）的微分（ここでは R^n で問題を取扱っているが，C^n で問題を取扱っても同じことである）

$$\partial^{s_1+s_2+\cdots+s_n} f(x)/\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\cdots\partial x_n^{s_n} \equiv D^s f(x)$$

$|S|=\sum_{i=1}^{n} S_i \leq m$ なるとき，領域 V において p 乗可積分であるような複素数値函数 $f(x)$ の全体が作る Banach（これは上に定義した Banach 空間の部分空間である）空間を $W_p^m(V)$ と書く．この場合，ノルム（距離）は：

(2.1; 2)　$\|f(x)\|_p^{(m)} \equiv \left(\sum_{|s|<m}\int_V |D^s f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

で与えられる．そのとき，

(2.1; 3)　$0<\frac{n}{p}-m<\frac{n}{q}-l$

ならば，写像：$f\in W_p^m(V) \longrightarrow f\in W_q^l(V)$ によって，$W_p^m(V)$ は $W_q^l(V)$ の“なかに”位相的に埋蔵される．すなわち

(2.1; 4)　$W_p^m(V)\subset W_p^l(V)$

ただし，V の境界 S のどの点も，V に含まれる一定の形の円錐の頂点になっているものとする．

この定理は，始めて Sobolov によって証明され，偏微分方程式の一般理論において重要な役割を演ずるのであるが，これはそのまま，函数近似の問題においても重要な役割を演ずる．我々が以下で問題にする場合は一次元の場合，すなわち $n=1$ に限るから，上の (2.1; 3) 式は

(2.1; 3a)　$0<\frac{1}{p}-m<\frac{1}{q}-l$

となる．従って，$(p,\ m)$，$(q,\ l)$ のえらび方によって，位相的に埋蔵される場合とされない場合が生ずる．これはノルム近似をする場合に特に注意すべき点であると思われる˙さらに (2.1; 2) は，もし函数がデスクリートな値でしか与えられていない場合，すなわち，(1; 2)の $\mathcal{D}_n^{(m)}$ の如くデータとして与えられている場合には，次の式を使うとよい．

(2.1: 2a)　$\|f\|_{p,D}^{(m)} \equiv \left(\sum_{|s|<m}\sum_{i\in I} |D^s f(x_i)|^p\right)^{1/p}$

又，p は一般に $1<p<\infty$ であるが，

(2.1;5)　$\begin{cases} p=1 & \text{の場合：} \|f(x)\|_1^{(m)} \\ p=\infty & \text{の場合：} \|f(x)\|_\infty^{(m)} = \sup_{x\in K}|f(x)| \end{cases}$

の如く，$p=1$，∞ の場合は，微分不可能なノルムとなり，Banach 空間のノルムでは取扱うことが出来なくなる．従って，p が 1 の場合と ∞ の場合とは実用的には非常に重要であるが，これらのノルム空間を比較することは，さらに数学的準備を必要とするので，今回の報告では割愛せざるを得なかったことをお断りしておく．

2. 2　Hilbet 空間，特に $L_2^{(m)}(T)$ について

Hilbert 空間はふつう完備な，複素内積空間として定義される．すなわち，

(2.2; 1)　Banach 空間で $p=2$ とおいたもの：$L_2^{(m)}$

$$\|f\|_{L_2}^{(m)} \equiv \left(\sum_{|s|\leq m}\int_V |D^s f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

として，ノルムが与えられる場合である．実は普通には，このノルムを先に与えるのでなく，まず，内積を

(2.2; 2)　$(f,g)^{(m)} \equiv \left(\sum_{|s|\leq m}\int_V |D^s f D^s g|\, dx\right)$

によって定義し，$\|f\|=\sqrt{(f,\ f)}$，として，ノルムが与えられる順序になるのであるが，ここではノルムを最初に与えたわけである．このノルムに対して Hilbert 空間はコンパクトな台をもつ．従って，Hilbert 空間はユークリッド空間に最も近いわけであり，数学的には，最も現実の物理空間に近い，美しい空間であると云える．ここで函数近以の上で重要な 2 っの点に注意しよう．すなわち，

定理（Von Neumann と Jordan による）：

Banach 空間が Hilbert 空間であるための必要十分条件は，中線定理：$\|x-y\|^2+\|y+y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$ が成り立つことである．ここに $x,\ y\in H$．

定理（Klee による）：

無限次元の Hilbert 空間は，その中の単位球：集合 $\equiv\{x;\|x\|=1\}$，と位相同型である．

この 2 定理を更に精密化したものが，恐らく，函数近

似には必要であろうが，現在この方面の研究は，未だきほど進んでいないので，我々としては上の定理によってのみ考えられる範囲内で，Hilbert 空間と近似問題について考えていこう．まず，中線定理が成り立つことであるが，これは，実は非常に簡単な事実である．すなわち，Hilbert 空間とその dual space とがノルム的に全く同一構造をもつことを示している．つまり Neumann と Jordan の定理は，逆にそのような空間は Hilbert 空間に限ること，すなわち，Hilbert 空間が唯一のそのような空間であることを主張しているのである．次に，位相に関する定理であるが，これも実に興味ある事実である．すなわち，この定理によれば，有界区間Tにおける Hilbert 空間と無限区間における Hilbert 空間（$-\infty$，$+\infty$）と位相的には全く同じ構造をもつことになる．従って，近似をする場合，位相的には任意の範囲の近似問題に，すべて適用できる近似方法である．と云える．

2. 2. 1. Hilbert 基底（L. Schwartz による）

定義：H が Hilbert 空間であり，$(\vec{e_i})_{i\in I}$ がHのベクトル $\vec{e_i}$ の族であるとする．$(\vec{e_i})_{i\in I}$ が“Hの Hilbert 基底”であるというのは次の 2 条件が満たされているときである．すなわち，

1) $\vec{e_i}$ はどの 2 つも互いに直交して，ノルムはすべて 1 である．

(2.2；3) $(\vec{e_i},\ \vec{e_j})=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j,\end{cases}$

この条件は $\vec{e_i}$ が独立であることも含んでいる．

2) $(\vec{e_i})_{i\in I}$ なる系は，“完全”または“位相的生成系”である．これは $\vec{e_i}$ の有限な 1 次結合の集合が“H において稠密”であることを意味する．そのためには，“すべての $\vec{e_i}$ と直交するベクトル $\vec{x}\neq 0$ が存在しないことが必要十分である”．ことが証明出来る．

さて，さうすると，すべての $\vec{x}\in H$ に対して，Hilbert 基底に関する $\vec{x}$ 座標とよばれる複素数を構成することができる．

(2.2；4) $x_i=(\vec{x},\ \vec{e_i})$

定理：

1) $\vec{x}\in H$，$x_i=(\vec{x},\ \vec{e_i})$ とする．級数 $\sum_{i\in I}x_i\vec{e_i}$ は H において総和可能であり，その和は $\vec{x}$ である．

2) 級数 $\sum_{i=I}|x_i|^2$ は総和可能であり，その和は $\|\vec{x}\|^2$ である．

さらに，$\vec{y}\in H$，$y_i=(\vec{y},\ \vec{e_i})$ のとき，級数 $\sum_{i\in I}x_i\bar{y}_i$ は総和可能であり，その和は $(\vec{x},\ \vec{y})$ である．

3) $\sum_{i\in I}x_i\vec{e_i}$ が $\vec{x}$ に収束するということは，いかなる $\varepsilon>0$ に対して有限集合 $J\subset I$ が存在して，すべての有限集合 $K\supset J$ について，

(2.2；5) $\|(\sum_{i\in I}x_i\vec{e_i})-\vec{x}\|\leq\varepsilon$

となることを意味する．

上の定理は近似問題において，決定的な結論である．すなわち，この定理によって，ノルム $L_2^{(m)}$（上の定理では $m=0$ の場合だけについて述べているに過ぎないが）において，函数を既知の基底の“有限和”によっていくらでも近似出来ることを意味している．したがって，$L_2^{(m)}$ 近似は一般の $L_p^{(m)}$ の中でも特に王者の位置にあると云い得る．しかしだからと云って，他のノルム近似が役に立たないということにはならない．それはノルムが違えば，空間の構造そのものが変ってしまうからである．特に，実用上，$p=\infty$ の如き微分不可能なノルムが現実には使われているのは，幾多の不便があるにもかかわらず，多項式近似の有用性と，その一意性にあるのである．

3. 函数空間と近似問題との関係

3. 1 一般論

以上，一般の函数空間，特に，Banach と，Hilbert 空間について述べ，その近似問題との関係について，その都度述べて来た．純粋数学的には，上記した点によって大体つくされていると思われるが，しかし現実の問題との関係においてさらに，一般的な注意を 2，3 与えておこう．

3. 1. 1. まず，Hilbert 空間の場合は別として，他のノルムを用いる場合には dual はノルム空間を用いた方が都合のよい場合が非常に多いと思われる．これはプログラムミング問題と殆んど等価であり，したがって，その方面の研究にまつべきであろう．

3. 1. 2. 次に，近似問題を電子計算機等を用いて数値的に処理しようという場合に起る問題である．すべて近似問題は，ある定義されたノルムのもとで最良近似であり，最適近似であるだけであって変数の特別な値に対しての問題については何ら関知していないのである．これは当然なことであるにも拘らず，よく忘れがちであることに注意したい．別な云い方をすれば，ある点でだけの近似をよくしようと云うことならば，それは何にも上に述べたような手続き（すなわち，数学的準備）はすべて不必要なことである．すなわち，テーラー級数展開ですべて間に合ってしまう．

3. 2. 具体例

さて，ここで，函数 $f(x)\equiv\sin x$，$(-\pi\leq x\leq\pi)$ を $f_{known}\equiv\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ で $L_p^{(m)}$ 近似する具体例を 2，3 記述し

ておく．

1)　$m=0,\ n=1,\ p=2,\ 3,\ 4.$ の場合

(2.1; 2) 式より，ノルム

(3.2; 1)　$E_p\equiv\|f-f_{known}\|_p$

$$=\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\sin x-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k]^p dx\right)^{1/p}$$

を最小にするようなa_kをみいだすために，$\partial E_p/\partial a_k=0$ と置くと，

(3.2; 2)　$\partial E_p/\partial a_k=\int_{-\pi}^{\pi}x^k(\sin x-\sum_{k=0}^{n}a^kx^k)^{p-1}dx=0$

$$k=0.1\cdots n$$

従って，a_k は $n+1$ の連立方程式の解として得られる．(3.2; 2) 式から明らかなように，$p>2$ の場合は，高次の連立方程式となり，その取扱いは一般に容易ではない．更に求まった係数が複素数になる場合も当然起り得る．もしそのような場合を，さけたければ，すべて函数は正値である．すなわち，マトリックスの場合に，実数に対応して，固有値が実なるための必要十分条件は，その2次形式が正，即ち，マトリックスが Positive definite であること，と同じ制約が要求されるのは当然であろう．

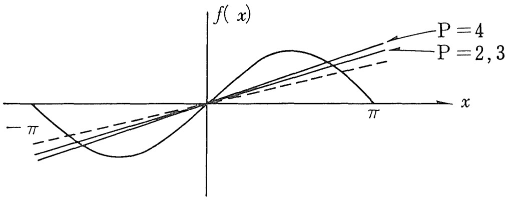

Fig. 1

$n=1$ の近似曲線

$m=0$ (実線)

$p=2$ のとき $a_0=0,\ a_1=0.303963551$

$p=3$ のとき $a_0=\pm0.442760035i,\ a_1=0.303963551$

$p=4$ のとき $a_0=\pm0.770958088i,\ a_1=0.329162416$

$m=1$ (点線)

$p=2$ のとき $a_0=0,\ a_1=0.233107398$

2)　$m=0,\ 1,\ 2,\ n=3,\ p=2$ の場合

(2.2; 1) 式より，ノルムは

(3.2; 3)　$E_2^{(m)}\equiv\|f-f_{known}\|_{L^2}^{(m)}$

$$=\left(\sum_{s=0}^{m}\int_{-\pi}^{\pi}[D^sf-D^sf_{known}]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sum_{s=0}^{m}\int_{-\pi}^{\pi}[D^s(\sin x)-\sum_{i=s}^{n}{}_iP_sa_ix^{i-s}]^2dx\right)^{1/2}$$

ここで ${}_iP_s=i!/(i-s)!,\quad i\geq s$

そこで，$\partial E_2^{(m)}/\partial a_k=0$ と置くことにより，次の a_k に関しての1次の方程式系を得る．

(3.2; 4)　$\partial E_2^{(m)}/\partial a_k=\sum_{s=0}^{m}\int_{-\pi}^{\pi}{}_kP_sx^{k-s}[D^s(\sin x)-$

$$-\sum_{i=s}^{n}{}_iP_sa_ix^{i-s}]dx=0$$

$$k=0,\ 1,\ \cdots n$$

Fig. 2 はこうして得られた3次の近似多項式による誤差曲線である．

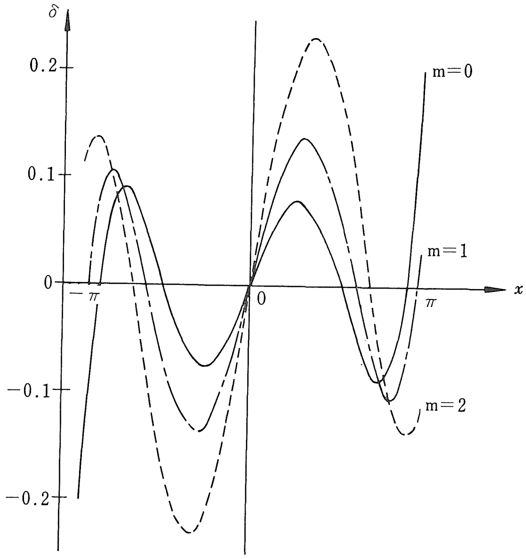

Fig. 2

3次多項式による $L_2^{(m)}$ 近似の誤差曲線

$\delta=\sin x-(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)$

$m=0$ のとき $\begin{cases}a_0=0, & a_1=0.856983342\\ a_2=0, & a_3=-0.093387700\end{cases}$

$m=1$ のとき $\begin{cases}a_0=0, & a_1=0.781943623\\ a_2=0, & a_3=-0.080215363\end{cases}$

$m=2$ のとき $\begin{cases}a_0=0, & a_1=0.677946895\\ a_2=0, & a_3=-0.065015683\end{cases}$

3. 3.　今後の課題

以上，簡単に $L_p^{(m)}$ 近似について述べて来たが，今後この方面の研究は，次の2点において特に重要であると思われる：

1°　フーリェ級数論，フーリェ変換論，ラプラス変換論，のような線型変換論，及び，さらに非線型変換論を含めた，一般的な函数変換方法とその数値解法の開発研究の方面，特に，これらの変換法は，純粋に位相数学的問題を代数的，さらに，整数論的問題に引きもどす上で，今日迄重要な役割を果して来た．現代においては，このような方法に別に限定される必要は少しもないので

あるが，しかし，一応過去の遺産として，また，将来のこの方面の研究の手掛りとして，重要であると思われる．

2° このような研究は，実際に用いられている，又将来，開発されるであろう種々な近似方法全体を，統一的に位置づける理論的基礎を与えるものである．そのような点で，恐らくは，数値解析全体，ひいては誤差解析の上に，決定的な影響を与えることになるだろう．

4. むすび

以上，筆者の行った研究の思想的背景，及び特に関心を持っている点について，概略を述べて来た．実際に電子計算機を利用して，これらの問題に取組んでいる人達としては，多少もの足りない点があったかも知れない．そのような筆者の努力の不充分な点についてはお許し願いたい．しかしそれは，当然のことと云えるかも知れない．すなわち，この方面の研究は，今始まったばかりであり，具体的な点については，将来の研究に待たなければならない点が非常に多いからである．

おわりに，本学電子工学科新美吉彦助教授に終始御指導いただいたことを記し，衷心より御礼申上げる．

参考文献

1° "Numerical Solution of Nonlinear Defferential equations" Edited by Donald Greenspan, 1966. John Wiley & Sons, Inc.

2° Lauren Schuwartz : "Méthodes Mathématiques Pour Les Sciences Physiques", Hermann, Paries, 1961.

3° "Lectures on Modern Mathematices", Edited by T.L.Saaty, 1963.

etc.