

生徒の論理的な思考を促す数学の授業について

—高大連携プログラム「無限についての話」を題材にして—

On mathematics classes which prompt students to think theoretically
—deriving from a lecture in the high school and university cooperation program
”Talk on the infinity”—

大島 和幸*
Kazuyuki Oshima

Abstract We give an account of an importance of teaching mathematics theoretically. Deriving from a lecture which I gave to high school students in the high school and university cooperation program, we come to the realization that a lot of students are not well trained to understand mathematics from a theoretical standpoint. In order to improve such a situation, we propose mathematics classes which prompt students to consider theoretically.

1. はじめに

高大連携プログラムの授業の一つとして、高校 1 年生に「無限」について話す機会を得た。数学の歴史を語るうえで無限の扱いを避けて通ることはできない。ギリシア時代以降 17 世紀までの数学者たちは、ゼノンのパラドックス等を回避するため、無限を扱うことに対して慎重であった。やがてニュートン、ライプニッツ、オイラー等は無限をナイーブに扱い、自然現象の理解を飛躍的に発展させ、数学は科学技術に大きな貢献をすることができた。しかしながら、20 世紀に入り、カントール、ラッセルは無限を直感的に扱うことの危険性を提示し、数学全体に大きな危機が訪れたが、何とかそれを乗り越えて今に至っている。

無限の扱いには論理の力が欠かせない。そこで授業では、1 対 1 対応を基本に無限集合の比較を行い、無限を扱うときには、もはや直感に頼りにならないことを述べた。さらに無限を扱うことで現れた「決定不能問題」について触れ、無限を扱うことで数学の土台を揺るがすような事態を招いたことを述べた。

以上のようなことを高校生に話して感じたことは、高校までの数学の授業では論理の力を鍛える機会をあまり設けていないのではないかと、いうことであった。高校生の多くは、数学を「与えられた問題を解

くもの」であると思っている。実際には、数学は多くの数学者がいろいろ悩み、苦しみながら、論理の力を頼りに創り上げてきたものである。もちろん直観は非常に大切であるが、最終的に認められるものは、論理的に矛盾のないものだけである。したがって、本来、数学を学ぶには論理的な思考力が不可欠のはずである。しかし、現在の数学の授業では、論理的な話はおざなりにされ、何よりも例題を解説し、それに類した問題を解くことを繰り返すことによって、「数学が分かる」というよりは「問題が解ける」という状態にすることを主たる目的にしてしまっているのではないだろうか。その結果、生徒は数学を与えられた問題を解くものと考えてしまうのではないだろうか。そこで、本稿では論理的な思考を生徒に促す数学の授業を行うことを提案する。

本稿の構成は以下の通りである。まず 2 節では実際の授業の内容の詳細を述べた。次に 3 節では、実際の授業中の生徒の理解程度および問題点を述べ、4 節で生徒の理解を上げるための考察をいくつか述べた。終わりに 5 節で、数学教育に対する提案を述べた。

2. 授業の内容詳細

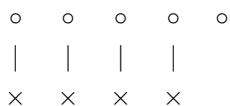
授業は以下のように進められた。授業時間は 90 分であり、最後の 10 分はレポート問題にあてた。

§ 1. 1 対 1 対応

*愛知工業大学 基礎教育センター（豊田市）

問 次の図において, \circ と \times とどちらが多いか.
 $\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$
 $\times \quad \times \quad \times \quad \times$

このような問いに対して, 数を知っていれば \circ は 5 個, \times は 4 個と「数える」ことによって \circ のほうが多いと答えることができる. しかし, 数を知らない場合でも



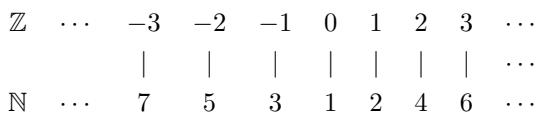
と「対応」をつけることによって, 余った \circ のほうが多いと答えることができる.

ものが無限にある場合, もはや数えることはできない. そこで, 無限にあるものの多い少ないを比較するのに「上のようにペアを作って過不足なくペアが作れたら同じ, どちらかが余ったら余ったほうが多い」と考えることにする. この「過不足ないペア」のことを 1 対 1 対応とよぶ. 2 つの集合の間に 1 対 1 対応が存在する場合, 2 つの集合の「濃度は等しい」と表現する. また, 1 対 1 対応が存在しない場合, 余りの出るほうを「濃度が大きい」と表現することにする.

以下, この 1 対 1 対応を基礎にして, いろいろな無限集合の濃度の大小を比較していく. 自然数全体の集合を \mathbb{N} , 整数全体の集合を \mathbb{Z} , 有理数全体の集合を \mathbb{Q} , 実数全体の集合を \mathbb{R} で表す.

§ 2. \mathbb{N} と \mathbb{Z} の濃度は等しい

まず, \mathbb{N} と \mathbb{Z} は次のように 1 対 1 対応をつけることができる. すなわち, 整数の 0 と自然数の 1 を対応させ, 整数の正の数と自然数の偶数を, また整数の負の数と自然数の 3 以上の奇数を対応させる:



したがって, \mathbb{N} と \mathbb{Z} の濃度は等しい.

§ 3. \mathbb{N} と \mathbb{Q} の濃度は等しい

次に \mathbb{N} と \mathbb{Q} の濃度を比較する.

	1	2	3	4	5	...
1	1	2	3	4	5	...
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$...
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$...
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

まず, 上の表のように分母を縦の列, 分子を横の行と見て, 正の有理数を全て書き出す. その際, 左上から右下に見て行って, 1 と $\frac{2}{2}$ や $\frac{1}{2}$ と $\frac{2}{4}$ などのように同じものが現れたら, 後者を消すことにする. こうして左上から右下に向かって

	1	2	3	4	5	...
1	→	↓	→	↓	→	...
2	↓	←	↑	↓	↑	...
3	→	→	↑	↓	↑	...
4	↓	←	←	←	↑	...
5	→	→	→	→	↑	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

というように番号づけていけば, 正の有理数全体と \mathbb{N} の間に 1 対 1 対応がつけられることが分かる. さらに § 2 で行ったように正の数と負の数を交互に番号づけていけば, 有理数全体も自然数と 1 対 1 対応がつけられることが分かる. したがって, \mathbb{N} と \mathbb{Q} の濃度は等しい.

§ 4. \mathbb{N} と \mathbb{R} の濃度は異なる

以上のように見えてくると, すべての無限集合の濃度は等しいような気がしてくるが, その期待に反して, \mathbb{R} と \mathbb{N} の濃度は異なることを示す.

そこで \mathbb{R} の一部分である $[0, 1]$ の実数全体と自然数とが 1 対 1 対応がつくと仮定すると矛盾がでることを示す. すなわち, $[0, 1]$ の実数全体が番号づけられて

- 0.0123142...
- 0.1211234...
- 0.3523449...
- 0.7671123...
- 0.1908314...
- ⋮

と並べられたとする. ところが上の下線部分の数字を任意に変えて作られた数は $[0, 1]$ の間の数であるのにこのリストには含まれていない. したがって, $[0, 1]$ の実数全体と自然数との 1 対 1 対応は作ることができない. 特に実数の方に余りが出るので, 実数全体の濃度のほうが, 自然数全体の濃度より大きいことが分かった.

ここで述べた方法をカントールの対角線論法と呼ぶ. ここに至って, 無限にも大小があることが分かり, 無限を数学として扱うことが可能になったのである.

§ 5. その後：連続体仮説

以上のように無限にも大小が考えられることが分かったのであるが、では、 \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} の濃度と \mathbb{R} の濃度の間の濃度をもつ数の集まりは存在するかどうかということが問題となる。カントールは「そのような数の集まりは存在しない」と信じていた。これを連続体仮説という。

この問題は50年ほど前に驚くべき形で解決した。

ゲーデル(1937年): 連続体仮説が正しくない, ということは, 現在われわれが知っているあらゆる数学的手段を用いても証明できない。
 コーエン(1963年): 連続体仮説が正しい, ということは現在われわれが知っているあらゆる数学的手段を用いても証明できない。

このような問題を決定不能問題という。無限を考えることで、「数学には肯定も否定もできない問題が存在する」という衝撃的な事実と直面することになったのである。現在は、このような数学の不完全性は認めつつも、数学者それぞれの信念に従って、それぞれの数学を発展させることに尽力をしている。

レポート問題

$(0, 1)$ の中にある点の濃度と $(0, 1) \times (0, 1)$ の中にある点の濃度を比べてください。

3. 生徒の理解および問題点

高校生にとっては、話の進め方も題材も共に若干難しすぎたと思われる。まず話の進め方についてであるが、高校生にとって、数学というのは「与えられた問題を解くもの」というイメージが非常に強いように感じられた。これは日頃、大学生を相手にしていても感じることもある。したがって、今回の授業のように数学を一つのストーリーとして捉え、論理的に話を進めていく授業形式に慣れていないことが理解を困難にしている原因の一つとして考えられる。また題材については、数学の実用性を重んじるあまりか、直感とかけ離れた内容に触れることが中学校、高等学校の数学では非常に少ない。その結果、高校生は直感的に正しいと思われることを疑うことができないことも理解を困難にしているもう一つの原因になっていると考えられる。これらはどちらとも広い意味で言えば、高校生が直感をなるべく排して論理を頼りに物事を考える練習を積んでいないことに起因すると考えられる。

以下、各セクションでの生徒の理解程度について述べ、各段階における問題点を挙げていく。

まず、§1の1対1対応については、ほとんどの生徒が理解できたと思われる。しかし、その1対1対応を手掛かりにして自然数と整数の濃度が等しいことの説明をした§2の段階で、多くの生徒が理解できなくなったようだ。これは「明らかに整数のほうが多いだろう」という直感にとらわれている結果であろう。論理で理解する練習を積んでいないために、論理的に導かれる結論より直感的に認められる結論を鵜呑みにしてしまうことが理由として考えられる。

§3は§2が理解できない生徒には、同様の理由によって理解できなかったであろう。しかし§2が理解できた生徒には理解は比較的容易であったと思われる。ただ、自然数と整数の1対1対応では整数も横1列に順に並べることができたので、対応が見やすかったが、今回は2次的に広がったので、対応が

\mathbb{Q}	$-\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{1}{2}$	\dots
								\dots
\mathbb{N}	7	5	3	1	2	4	6	\dots

というようになり、有理数の順序が2の後に $\frac{1}{2}$ がくるなど、小さい順になっていなかったことが難しいと感じた生徒もいたように思う。

§4の対角線論法は、やはり難しかったようだ。高校1年生ということも、背理法にまだ慣れていないということもあったと思う。ここでは背理法の基本的なことを復習すべきであったと思われる。また、「 $[0, 1]$ の実数全体が番号づけられて並べられる」という仮定自体が理解できていないようであった。これも直感にとらわれて、論理的な帰結を理解できないためであろう。

§5の話には興味を示す生徒が数名いた。意味するところは分からないものの、「無限」が内包する深さのようなものを感じ取っているようであった。

レポート問題は、ほとんどの生徒が手つかずであった。何か書いている生徒も、やはり直感的に $(0, 1) \times (0, 1)$ の方が大きいと考えてしまっている答案であった。授業中に無限を相手にするときには直感はあまり頼りにならないということを強調したつもりであったが、十分ではなかったと思われる。

4. 考察

時間の都合で出来なかったが、それぞれの段階で簡単な類似問題や関連した問題を解かせて進めると理解が深まったと考えられる。先に高校生の多くは数学を「与えられた問題を解くもの」と考えていると述べたことと、相反するようであるが、問題としては単に数値を代入すれば機械的に答えが出るようなもので

はなく, 自ら考え理解を助けるようなものであることが望まれる. 例えば次のような問題が考えられる.

練習問題 1 偶数と自然数の濃度の大小を比較してみよ.

練習問題 2 自然数と平方数 (1, 4, 9, 16, 25, ...) の濃度の大小を比較してみよ.

練習問題 3 下図上段の表のように分母を縦の列, 分子を横の行と見て, 正の有理数を全て書き出す. これらの正の有理数を下図下段の表のような順に番号づけるとき, 30 番目の数は何か.

	1	2	3	4	5	...
1	1	2	3	4	5	...
2	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$...
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$...
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{4}$...
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

	1	2	3	4	5	...
1	→	↓	→	↓	→	...
2	↓	←	↑	↓	↑	...
3	→	→	↑	↓	↑	...
4	↓	←	←	←	↑	...
5	→	→	→	→	↑	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

練習問題 4 $\sqrt{3}$ が無理数であることを説明してみよ.

このように, 練習問題を通じて, 自分の手を動かしながら考えることは確かに数学を学ぶ上で極めて重要である. しかし, あくまでも問題を通じて数学の理解を深めるためであり, 問題を解くことのみが数学ではないことは強調したい.

また, 話の随所で, ゼノンのパラドクスのゼノンや, 自然数と平方数の濃度が等しいことを主張したガリレイ, 無限の深淵を覗き込んだカントールの悲劇的な生涯など, 生身の数学者たちの逸話を挿入したら, もう少し内容を身近に感じてもらえたのではと考えている.

5. 終わりに

なるべく高校では学べないような話をしたいと思う. なおかつ参加者が高校 1 年生であることから微分積分などを用いずに話せる内容を, というこ

でカントールの無限を題材に選んだ. 内容も授業の進め方も, おそらく普段の高校の授業とは大きく異なっていたため, 参加した高校生の多くは戸惑ってしまったことと思う.

そのような中で強く感じたことが, 以上で述べてきた「論理的に話を進めることの大切さを日頃の授業で教えていくようにする必要性」であった. おそらく, 現在の高等学校の数学の授業では計算技術の習得にかなりのウェイトが置かれていると思う. それはもちろん必要なことであるが, それと並んで数学を論理を積み上げながらひとつのストーリーとして学ぶことも重要だと考えるのである. それというのも, 大学では, 高校までの数学の授業と異なり, 論理に重点を置く授業が増える. 微分積分学も, 高校では計算問題の色彩が強いが, 大学では論理を積み上げる形で述べられることが多い. 例えば, 極値の判定を述べるのに, 高校では微分して増減表を書くだけ, ということが多くなされるが, 大学では, まず平均値の定理を示して, 次にテイラー展開を示して, それをもとに極値判定の定理を述べる, という順序で述べられることが多い. また, 積分も, 高校ではまず微分の逆演算として不定積分を導入して, その端点の差を計算することによって定積分を定義する, というように述べられるが, 大学ではまず区分求積として定積分を定義して, 微分積分学の基本定理を通じて, 不定積分を導入する, というように進める場合が多いと思う.

もちろん, 文部科学省の学習指導要領の範囲内で授業を行うことを考えると, 授業内容を大幅に変更することは不可能にしても, 積分の授業を行う際の導入として, 区分求積法および微分積分学の基本定理について簡単に触れるだけでも, 生徒の積分への意識は違ったものにならないだろうか.

数学は単なる計算技術ではなく, 論理を基礎に積み上げられた大きな構築物である. 論理の一つ一つは単純であろうとも, その積み重ねの結果は先の決定不能問題のように我々の直感を遙かに凌駕する. さらに数学は自己充足に留まることは歴史的に見ても決してなく, 現代のあらゆる科学技術を支える礎と必ずなりうるものなのである. そのことを生徒に伝えることは, 我々数学教育に携わる者にとっての重大な使命であろう.