

薄肉シェル要素を用いた非線形有限変位解析プログラムの開発

Used Thin Shell Element Develop Nonlinear Finite Displacement Analytical Program

田中 智宏* 青木 徹彦**
Tomohiro TANAKA* Tetsuhiko AOKI**

ABSTRACT: The Great Hanshin Earthquake of 1995 caused several types of damage in steel structures. Many cases of local buckling appeared in steel piers of elevated highways. In order to analyses local buckling behavior thin shell element had been developed for nonlinear finite displacement analysis. In this study, comparison between the results by developed program and monotonically loaded experiment of circular steel pipes column conducted in 1995 is performed and obtained good agreement in both results.

1. 序論

鋼構造にとって、座屈耐力の評価は今日、最も重要な問題の一つとなっている。そこで座屈荷重を解くためには、実験的方法と解析的方法の二つがある。実験的方法のみによって設計式を作ろうとすると、膨大な数のパラメータを含んだ供試体を数多く作らねばならず、費用および時間に限界がある。一方、解析的方法としては有限要素法による数値解析が現在主流となっているが、この部分でもいくつかの問題が残されている。鋼製橋脚の耐震性の検討を数値解析によるシュミレーションを行うにあたっては、幾何学的非線形と材料非線形を同時に考慮した非線形有限変位解析を行う必要がある。非線形有限変位解析は、使用するプログラムの特性、解析条件の設定、解析モデルの作成方法などにより解析結果に相違が生じる可能性があることが指摘されていることから、実験結果等によって検証された解析仕様を用いて行うことが肝要である。

また、現在先人が開発した既存プログラムや汎用ソフト

(ABAQUS,ADINA,COSMOS,DIANA, MARC など) が一般的に利用されているが、それを効率よく、正しく、使いこなすには有限要素法に精通していることが要求される。

そこで、本研究では有限要素法により作成した非線形有限変位解析プログラムの理論、解析方法、プログラム解説を明確に示し、1995 年に本学で行われた円形断面鋼管柱の単調載荷実験と解析結果を比較しプログラムの精度、適用性について検討する。

2. 基礎理論および定式化

2.1 非線形問題

構造解析における基本式は、i) 釣りあい式、ii) 応力-ひずみ関係式 (構成方程式)、iii) ひずみ-変位関係式の 3 つである。これらの方程式を組み立て、境界条件を満足するように解く。3 つの基本式のどこに非線形性を考慮するかにより非線形の種類が異なる。ii) の関係が非線形の場合は材料非線形問題となる。i)、iii) の非線形性に主眼を置く場合が幾何学的非線形問題である。

基礎方程式の定式化としては、逐次変位座標系を移動させ

*愛知工業大学 大学院建設システム工学専攻

**愛知工業大学 土木工学科 (豊田市)

る Updated Lagrange の定式化と、変形前の座標系のまま変位履歴を考慮して計算をする Total Lagrange がある。今日では前者が主流となっている。この方法は、弾塑性体が初期形状から変形してきて、現在形状に至ったとすると、この状態を基準に方程式を立て、つぎの微小増分に対する状態変化つまり変形等の増分を問題にしていくものである。以下に、Updated Lagrange の定式化により導かれた接線剛性マトリックスを示す。

2.2 仮想仕事-増分理論

ある荷重状態 Q における物体を Q_n とし、次の荷重状態 $Q + \Delta Q$ における状態を Q_{n+1} とする。荷重の増分量をある程度小さくすると、 Q_n と Q_{n+1} 状態間の物体の変化は線形近似できる。以下では、 Q_n と Q_{n+1} 状態間の仮想仕事の原理を導く。ここで、一般的な仮想仕事の原理を式(1)に示す^{1),2)}。

$$\iiint_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv - \iint_{S_\sigma} T_i' \delta u_i ds = 0 \tag{1}$$

ここで、

σ_{ij} : 応力 ϵ_{ij} : ひずみ u_i : 変位

T_i : S_σ 上で与えられる単位面積当たりの外力

いま、 Q_n 状態の解が得られたとし、その状態の応力、変位、 S_σ 上の表面力、 S_u 上の変位を $\sigma_{ij}^{(n)}$ 、 $u_i^{(n)}$ 、 $T_i^{(n)}$ 、 $u_i^{(n)}$ と仮定し、 S_σ 上の荷重増分 T_i' あるいは S_u 上の変位増分 u_i' によって、応力増分 σ_{ij} 、変位増分 u_i が生じ、 Q_{n+1} 状態になったとし、ここで仮想仕事の原理を適用すると。

$$\iiint_V \left\{ \sigma_{ij} \delta e_{ij}^* + \sigma_{ij}^{(n)} \frac{1}{2} \delta (u_{k,i} u_{k,j}) \right\} dv = \iint_{S_\sigma} T_i' \delta u_i ds + R \tag{2}$$

ここに、

$$R = - \left\{ \iiint_V \sigma_{ij}^{(n)} \delta e_{ij}^* dv - \iint_{S_\sigma} T_i^{(n)} \delta u_i ds \right\} \tag{3}$$

式(2)が、本研究で用いる有限要素定式化の基本となる仮想仕事式である。

ここで、式(2)の左辺第 1 項から弾性剛性マトリックス $[K_e]$ が、第 2 項から幾何学的剛性マトリックス $[K_G]$ が導き出される。この両者を足し合わせることで要素の接線剛性マトリックスが完成する。

2.3 接線剛性マトリックス^{1),2)}

(1) $[K_e]$ マトリックス

以下に、式(2)左辺第 1 項から導かれた面内ひずみ K_{mm} 、

面内回転ひずみ $K_{\phi\phi}$ 、面内曲げひずみ K_{mb} 、面外曲げひずみ K_{bb} 及び要素の弾性剛性マトリックス $[K_e]$ を示す。

$$K_{mm} = \iiint_V B_m^T D_e B_m dv \tag{4a}$$

$$K_{\phi\phi} = \iiint_V B_\phi^T D_e B_\phi dv \tag{4b}$$

$$K_{mb} = \iiint_V (-t) B_m^T D_e B_b dv \tag{4c}$$

$$K_{bb} = \iiint_V t^2 B_b^T D_e B_b dv \tag{4d}$$

ここで、

t : 板厚

B : ひずみ-変位マトリックス

D_e : 応力-ひずみマトリックス

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$[K_e] = \begin{bmatrix} K_{mm} + K_{\phi\phi} & K_{mb} \\ K_{mb} & K_{bb} \end{bmatrix} \tag{6}$$

(2) $[K_G]$ マトリックス

以下に、式(2)の左辺第 2 項から導かれた $[K_G]$ マトリックスを示す。

$$K_G = \iiint_V B_\theta^T D_\theta^{(n)} B_\theta dv \tag{7}$$

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_G \end{bmatrix} \tag{8}$$

2.4 弾塑性剛性マトリックス

図 1 に示すように、板厚 t の要素を板厚方向に N 分割し分割板厚を t/N とし、一軸引張り試験から得られた塑性域での応力-ひずみ関係を用い、式(5)の D_e マトリックス (弾性域での応力-ひずみマトリックス) を式(9)に示す D_p マトリ

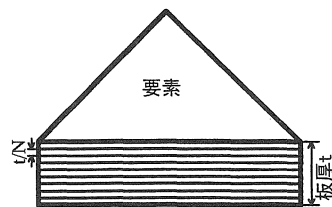


図 1 層分割

ックス (塑性域での応力-ひずみマトリックス) に置き換え、それぞれの項に対応する層剛性マトリックスを K_{mmj}^* 、 $K_{\phi\phi j}^*$ 、 K_{mbj}^* 、 K_{bbj}^* とおく。

この塑性応力-ひずみマトリックス D_p は、その時の応力状態 σ とひずみ硬化係数 H' で決定されるマトリックスである⁹⁾。以上より、弾塑性状態における要素剛性マトリックス $[K_{ep}]$ マトリックスが式(10)のように層剛性マトリックスの和として得られる⁹⁾。図2に非線形有限変位解析プログラムの計算フローチャートを示す。

$$S_6 = \frac{E}{1+\nu} \tau_{xy} = 2G\tau_{xy}$$

$$K_{mm}^* = \sum_{j=1}^N K_{mmj}^* \quad , \quad K_{\phi\phi}^* = \sum_{j=1}^N K_{\phi\phi j}^*$$

$$K_{mb}^* = \sum_{j=1}^N K_{mbj}^* \quad , \quad K_{bb}^* = \sum_{j=1}^N K_{bbj}^* \quad (10)$$

3. 解析方法

3.1 使用要素

使用要素は、1 節点につき x 、 y 、 z 、 θ_x 、 θ_y 、 θ_z の 6 自由度とし要素内の任意点の変位と節点変位の関係を予め定めておく変位関数は、 x 、 y の一次式を用い、この変位関数によって図3に示す要素内では、ひずみが一定になる 18 自由度三角形定ひずみシェル要素を用いることにする。

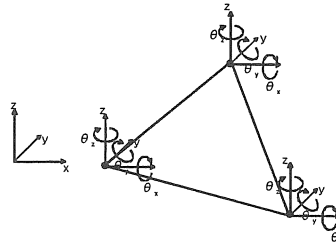


図3 18自由度三角形定ひずみシェル要素

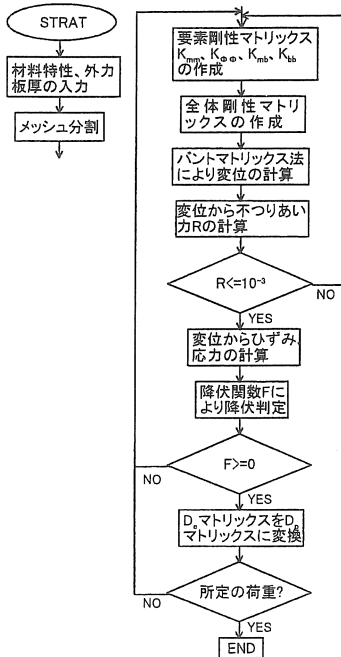


図2 フローチャート

$$D_p = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} & -\frac{S_1 S_6}{S} \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} & \frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_2^2}{S} & -\frac{S_2 S_6}{S} \\ \text{SYM.} & & \frac{E}{2(1+\nu)} - \frac{S_6^2}{S} \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで、

$$S = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H' + S_1 \sigma'_x + S_2 \sigma'_y + 2S_6 \tau_{xy}$$

$$S_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\sigma'_x + \nu \sigma'_y), \quad S_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \sigma'_x + \sigma'_y)$$

3.2 初期条件

鋼製橋脚や上部構造に対して死荷重および活荷重を対象にした耐力問題を扱う場合、一般的に、製作上特定の形状不整や溶接による残留応力の現れることが確認されている場合は、それを用いるものとし、不整量は製作基準で与えられる公差程度とするのが良いと考えられている。

しかしながら、鋼製橋脚に対しては、地震時荷重のような繰り返し荷重を受ける場合、1 回の履歴ループを描く間に、初期不整、残留応力ともにある程度エネルギー吸収される傾向にあり、最大荷重に至るまでには複数の履歴ループを描くことから、これらの影響はほとんど生じないと考えられる⁹⁾。また、建設省土木研究所や他の機関にて実施された繰り返し

載荷実験時における各供試体の製作上の初期不整、残留応力はほとんど計測されていないこと⁹⁾、他の解析事例においても初期不整、残留応力を考慮していないことと併せて、今回は、初期不整、残留応力は考慮しない。

3.3 材料特性値及び降伏条件

構造用鋼材の繰り返し塑性に関する構成則については、降伏棚、硬化係数の変化等を鋼材の一軸引張試験に基づき、近似できるモデルを選定する必要があり、現在よく使用されているモデルは、バイリニア型、トリリニア型である。本研究では、バイリニア型を使用する。そこで重要となるのが、降伏後のひずみ硬化係数 E' である。 E' は、 $1/70 \cdot E \sim 1/100 \cdot E$ 程度の値を用いることが多く、一軸引張試験の応力-ひずみ曲線の 5%ひずみに対応する点と降伏点を結んだ直線とよく一致することから図 4 において 0.2%ひずみを通り、0.2%ひずみと 5%ひずみの間で最小二乗法により近似直線を求めこれを降伏後の二次勾配（応力-ひずみ関係）とする。

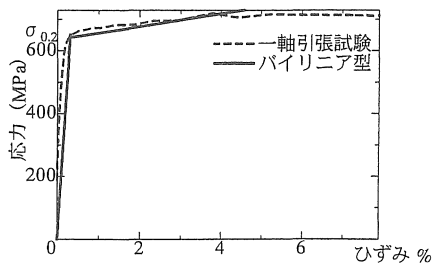


図 4 一軸引張試験⁹⁾とバイリニア型の設定

一般に鋼材で用いられている Von Mises の降伏条件を使用すれば、降伏点、最大荷重まで十分な解析精度が得られとされていることから、Von Mises の降伏条件を使用する。式 (11) に Von Mises の降伏関数 F^0 を示す。

$$F = \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_y^2\} / 6 \quad (11a)$$

すなわち、

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{2} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}} \quad (11b)$$

3.4 収束判定方法

収束判定が必要な非線形問題を解く場合、外力と内力が釣

り合うまで繰り返す計算を行うときの収束判定方法として、Newton-Raphson 法や修正 Newton-Raphson 法が代表的な手法とされている。そこで図 5 に示す様に Newton-Raphson 法は、順次接線を求め勾配を変化させているのに対し、図 6 に示す修正 Newton-Raphson 法は、1 つ目の接線勾配をそのまま使用して解を求めている。そのため計算回数が多くなり収束性が悪いため本研究では、図 5 の Newton-Raphson 法を使用する。

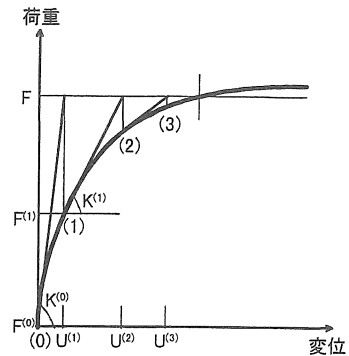


図 5 Newton-Raphson 法

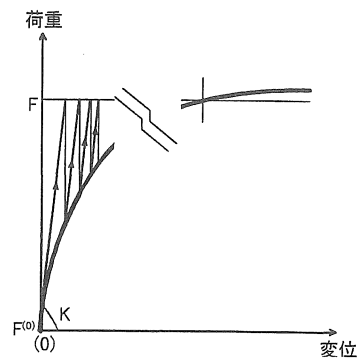


図 6 修正 Newton-Raphson 法

3.5 計算アルゴリズム

有限要素法で、全体剛性方程式を解く、つまり多元連立一次方程式を解く過程において計算時間を必要とする。連立一次方程式は元数が増すにつれ、ほぼ 2 乗の割合で計算効率が悪くなり、三次元では、節点数の 3 乗の割合で計算時間が増す。

多元連立一次方程式の解法には、大別して反復法と直接法の 2 通りがある。一万元以上の大規模な構造解析には、反復解法の方が直接法より有利であるが、全体剛性マトリックス

の構造によっては収束性が悪くなり、非効率となるので注意する必要がある。直接解法は収束性にまったく問題にならない。よって今回の解析では、直接法のガウス法のバントマトリックス法を使用する。

4. 解析結果とその考察

4.1 幾何学的非線形性の評価

まず、最も難しいとされている幾何学的非線形性のみを考慮したプログラムにより図7に示すような片持ち梁の解析を行う。モデルは、長さ10cmのものを10等分し、幅3cmを3等分、板厚1cmとし、片持ち梁の端部に鉛直荷重を載荷して解析した。解析結果を図7に示す。図の横軸はたわみ w を長さ L で無次元化し、縦軸は鉛直荷重 P を L^2/EI で無次元化してある。図中の4Finite elementsは文献8)に示されている4つの梁要素でモデル化した場合の解析結果である。解析結果から開発したプログラムは、たわみが小さい範囲では弾性理論値、4Finite elementsとよく一致し、たわみが大きくなる大変形の範囲では4 Finite elementsと一致している結果となり幾何学的非線形性の精度は良いと言える。

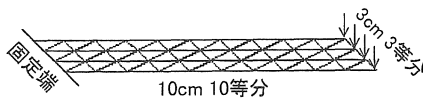


図7 片持ち梁

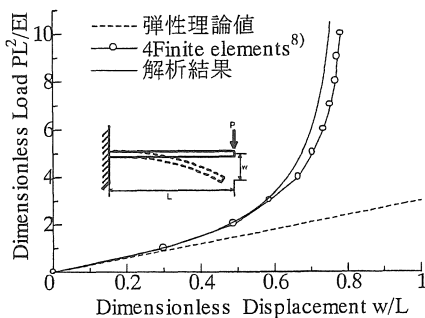


図8 幾何学的非線形解析結果

4.2 円形断面鋼管柱の単調載荷実験

本研究で、開発した非線形有限変位解析プログラムの精度を確認するため、1995年に本学で行われた単調載荷実験結

果の荷重-変位曲線と解析結果を比較する。

実験供試体は柱長1200mm、外径300mmの円形断面鋼管柱で、板厚を3、6、9mmの3種類(径厚比 R/t 、50、25、17)について実験を行っている(表1参照)。材質は、SM570Qで公称降伏応力 σ_y は510MPaである⁹⁾。

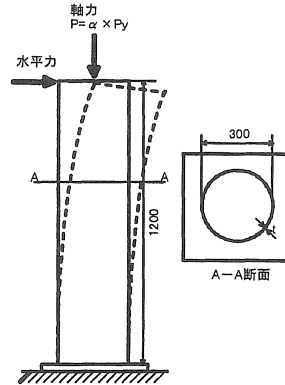


図9 実験供試体略図

表1 供試体緒元

Name	R/t	軸力比	鋼管 D×L (mm)	板厚 t (mm)
AP50-00	50	0	D300×L1200	3.0
AP50-15		0.15		
AP25-00	25	0		6.0
AP25-15		0.15		
AP25-30		0.30		
AP17-00	17	0		9.0
AP17-15		0.15		
AP17-30		0.30		

実験載荷方法は、上端面に300tf長柱載荷装置により、上部工重量に相当する一定鉛直荷重(軸力)を負荷した状態を保ちつつ、供試体頂部に水平荷重を一方方向に載荷する単調載荷及び繰り返し載荷実験を行っている(図9参照)。今回開発した非線形有限変位解析プログラムによる解析との比較では、単調載荷実験結果を用いる。

単調載荷実験の載荷パターンとして各径厚比(50、25、17)について軸力 P を降伏軸力 P_y の $\alpha=0、0.15、0.30$ 倍の3種類の供試体について実験を行っている(表1参照)。

4.3 部位別メッシュ分割

一般に有限要素法解析におけるメッシュ分割は、細かくす

るほど解析精度が向上するが、計算時間や容量が大きくなるため適当なメッシュ分割を決定する必要がある。そこで、対称性を考慮し 1/2 モデルとし、円形断面橋脚の円周方向と高さ方向の分割を以下のように決定した。円形断面橋脚のメッシュ分割は、基部から 450、200、550mm の 3 つのプレートに分け各プレートの分割を変化させる。基部近傍の 450mm 区間は、以下に示す①、②により分割を決定した。基部近傍のメッシュ分割を表 2 に示し、メッシュ分割全体図を図 10 に示す。表中の括弧内の数字は、分割数を示す。

① 円筒からなる円形断面橋脚の高さ方向のメッシュ分割については、矩形断面橋脚に比べて橋脚基部の圧縮座屈が基部に近い位置で発生し、しかも弾性座屈長が短くなるため、周方向のメッシュ分割よりも橋脚基部近傍の高さ方向のメッシュ分割を十分に弾性座屈長以下にする必要がある⁹⁾。

$$\lambda = 1.72\sqrt{Rt} \quad R: \text{半径} \quad t: \text{板厚} \quad (12)$$

② 円周方向のメッシュ分割については、橋脚高さ方向のメッシュ分割サイズに対し形状比が著しく壊れない範囲で分割する⁹⁾。

表 2 部位別メッシュ分割 (単位:cm)

Name	λ	高さ方向 (分割数)	円周方向 (分割数)
AP50	3.65	3.46(13)	3.37(28)
AP25	5.16	5.00(9)	5.24(18)
AP17	6.32	5.63(8)	5.89(16)

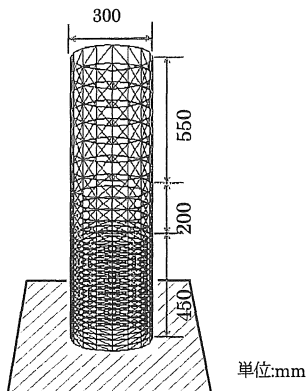


図 10 解析モデルのメッシュ分割

4.4 境界条件及び荷重条件

橋脚基部固定条件は、並進自由度 (U_x , U_y , U_z) 及び回転自由度 (θ_x , θ_y , θ_z) を全て拘束とし、対称面に位置する節点の直角方向自由度 (U_y) 及び回転自由度 (θ_x , θ_z) を拘束した⁹⁾。

荷重条件は、単調荷重実験の荷重方法に合わせて図 11 に示すように、まず供試体に上部工重量に相当する所定の鉛直荷重 (軸力) を載荷した状態を他も似つつ、頂部に一定方向の水平荷重を静的に載荷する単調荷重とする。数値解析では、変位制御による解析が一般的であるが今回の解析では、荷重制御で解析を行う。

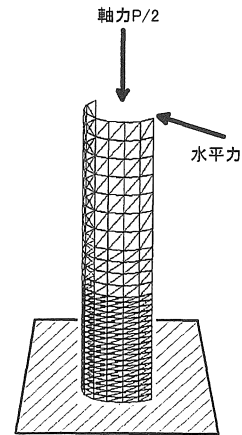
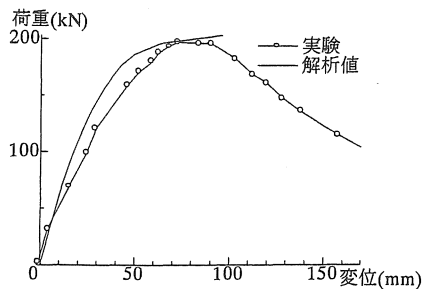


図 11 荷重条件

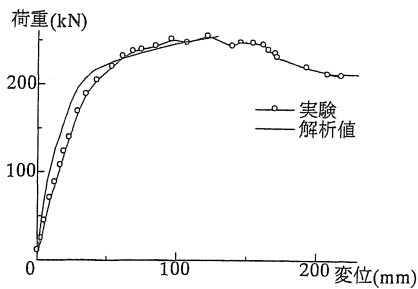
4.5 解析結果の比較

図 12、13 は、それぞれ AP25、AP17 シリーズの実験結果と解析結果を比較した図である。AP25 シリーズ (図 12) は、軸力比に関係なく弾性域と最大荷重点までの経路が実験結果とほぼ一致している。AP17 シリーズ (図 13) は AP25 シリーズよりも板厚が厚いために、弾性域での勾配に違いが現れているが、最大荷重点までの経路は実験値とほぼ一致していると言える。最大荷重点後では、AP25、AP17 シリーズともに違いが現れている。これは、板厚方向の分割をしていないこと、荷重制御を行っているため、収束性が悪く計算を打ち切っているためである。

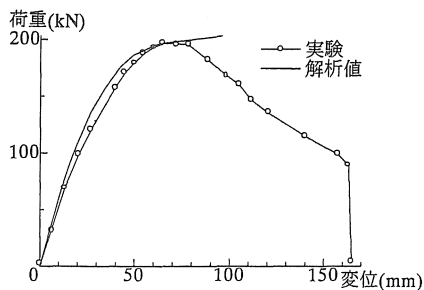
これは、変位制御にすることにより若干の修正が可能である。



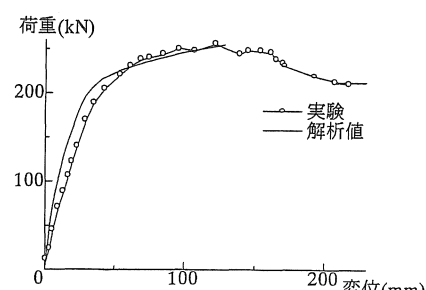
(a) AP25-00



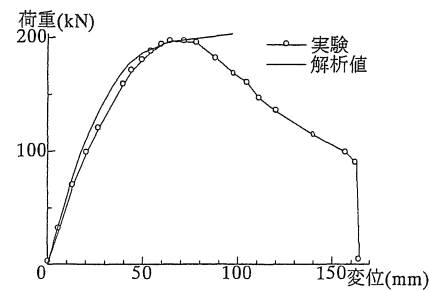
(b) AP17-15



(b) AP25-15

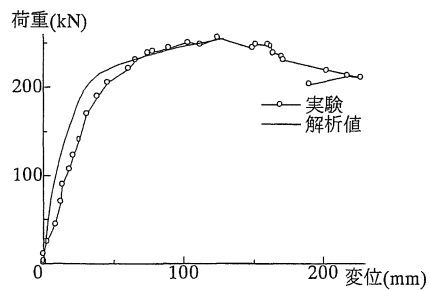


(c) AP17-30



(c) AP25-30

図 12 AP25 シリーズ解析結果



(a) AP17-00

図 13 AP17 シリーズ解析結果

4.6 プログラムの問題点、改良点

以下に、今回開発した非線形有限変位解析プログラムの問題点、改良点を示す。

- 1) 今回の解析は、板厚方向に分割せずに解析しているので厚肉要素に対して精度が悪いので板厚方向にも分割する必要がある。
- 2) 荷重制御ではなく変位制御にすれば収束及び最大荷重後の精度が良くなると考えられる。

5. 結論

有限要素法による非線形有限変位解析プログラムを開発した。初めに、最も難しいとされている幾何学的非線形のみを考慮したプログラムの精度を確認した。次に、材料の塑性を組み込むプログラムに改良した。さらに、1995年に行われた円形鋼管柱の単調載荷実験と荷重-変位曲線と比較した。得られた結果を以下に述べる。

1. 幾何学的非線形性のみでの解析では大変形の範囲まで精度が良い。
2. 薄肉 (AP25) の場合、弾性勾配と最大荷重点まで実験値とほぼ一致している。
3. 比較的厚肉 (AP17) の場合、実験値に比べ、解析の弾性勾配の精度が悪いが最大荷重点までの経路は実験値とほぼ一致している。
4. 薄肉、厚肉共に最大荷重後の経路に問題があり改良の必要がある。

参考文献

- 1) 篠田和利：薄肉構造物の有限変位解析に関する基礎的研究、平成 4 年度 愛知工業大学 修士論文。
- 2) 国分尚司：架設用鋼管継手の曲げ強度実験と有限要素解析、平成 7 年度 愛知工業大学 修士論文。
- 3) 池内智行：鋼材の塑性履歴構成式の定式化と繰り返し外

力を受ける鋼構造物の変形能の評価への応用に関する研究、大阪大学学位論文 1998 年 1 月。

- 4) 吉田裕、増田陳紀、松田隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法、土木学会論文報告集 第 288 号、pp.41~55、1979 年 8 月。
- 5) 日本橋梁建設協会：鋼製橋脚の弾塑性有限変位 FEM 解析マニュアル 講習会用テキスト No.10、平成 10 年 2 月。
- 6) 山田将樹：鋼製橋脚の耐震実験と耐震解析、平成 9 年度 愛知工業大学 修士論文。
- 7) 村田雅人：弾・塑性材料の力学入門、日刊工業新聞社、1993。
- 8) T.Y.Yang：よくわかる有限要素構造解析入門、技報堂出版、1996。

(受理 平成12年 3 月18日)